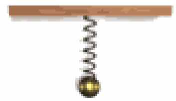
Relação de Incerteza no Oscilador Harmônico Quântico Confinado

Danilo Sande Santos
Alejandro Javier Dimarco

Introdução



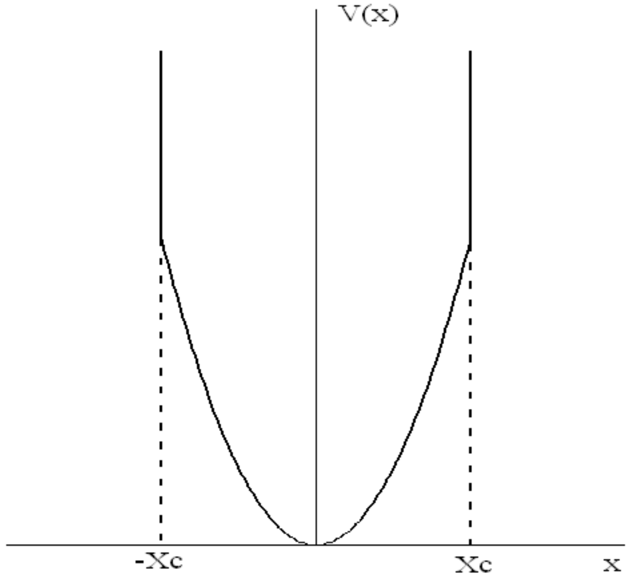
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x,t)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

Introdução

- Importância do estudo de sistemas quânticos confinados.

- O que é um Oscilador Harmônico Quântico Confinado?

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 & , |x| < x_C \\ \infty & , |x| \geq x_C \end{cases}$$



Objetivo

- Calcular o comportamento das relações de incerteza Δx e ΔP, com o parâmetro de confinamento.

Cálculo de ΔX e ΔP:

Pré-requesitos:

1-Resolver a equação de schroendinger com o potencial de um oscilador confinado

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\Psi(x)=E\Psi(x)$$

Independente do tempo e unidimensional

Mudando as variáveis

$$x = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\xi \qquad \eta = \frac{\xi^2}{2} \qquad \Psi(\eta) = \exp(-\eta/2)F(\eta)$$

$$\eta\frac{d^2F(\eta)}{d\eta^2}+(\beta-\eta)\frac{dF(\eta)}{d\eta}-\alpha F(\eta)=0$$

$$\alpha = \frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2} \text{ e } \beta = \frac{1}{2} \qquad \lambda = E/\hbar\omega$$

1-Resolver a equação de schroendinger com o potencial de um oscilador confinado

$$\eta\frac{d^2F(\eta)}{d\eta^2}+(\beta-\eta)\frac{dF(\eta)}{d\eta}-\alpha F(\eta)=0$$

$$\alpha=\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}\ \text{e}\ \beta=\frac{1}{2}$$

$$\lambda = E/\hbar\omega$$

$$F(\alpha,\beta;x)=A.M\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2};\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)+ B.\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2}.x.M\left(\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{2},\frac{3}{2};\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)$$

Solução geral caso par e ímpar.

$$M(\alpha,\beta;\eta) = {}_1F_1(\alpha,\beta;\eta)=1+\frac{\alpha}{\beta}\eta+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}\frac{\eta^2}{2!}+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}\frac{\eta^3}{3!}+\ldots$$

1-Resolver a equação de schroendinger com o potencial de um oscilador confinado

$$\Psi(x) = \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)A.M\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2};\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)$$

A e λ desconhecidos

Caso par.

Aplicando a condição de contorno:

$$\Psi(x) = 0$$

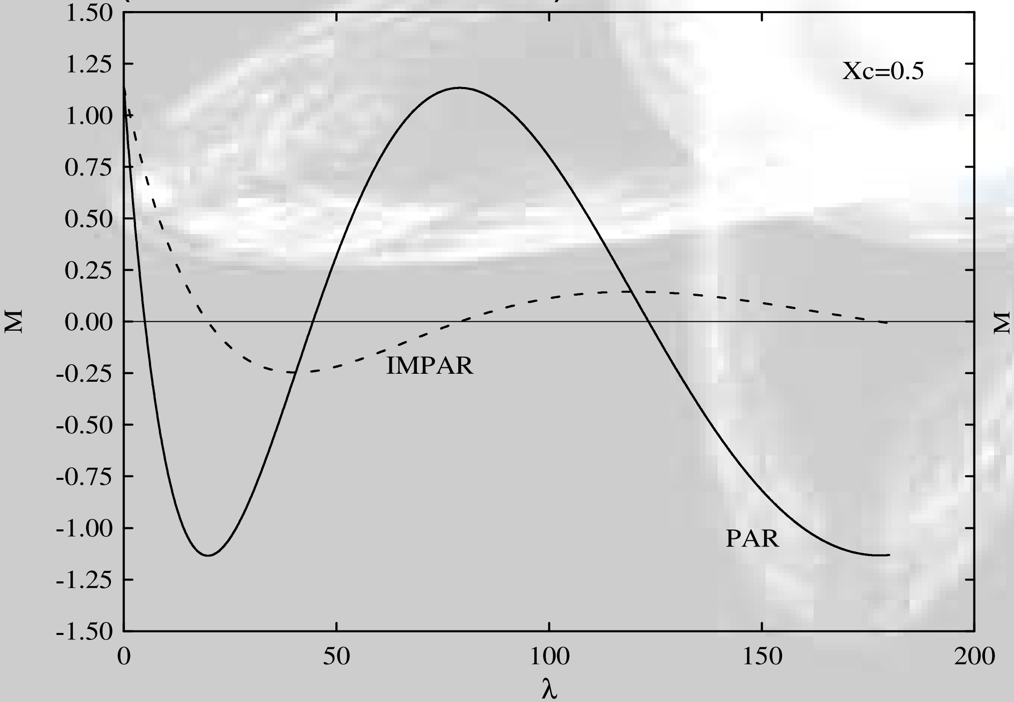
Para IXI≥Xc

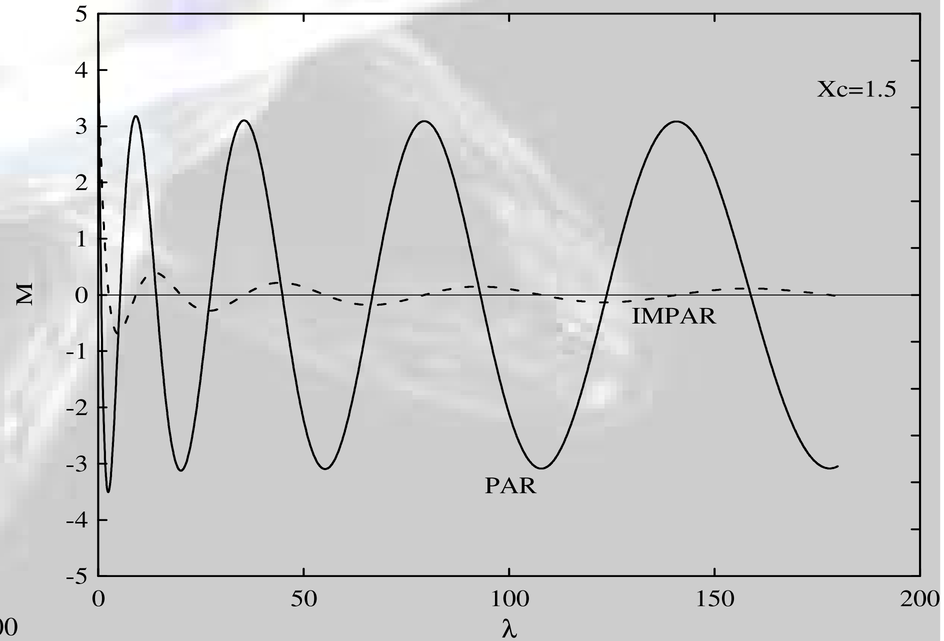
$$\Psi(\pm x_C) = A\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x_C^2\right)M\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2};\frac{m\omega}{\hbar}x_C^2\right) = 0$$

2-Cálculo dos autovalores λ para o estado fundamental

$$\Psi(\pm x_C) = A\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x_C^2\right)M\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2};\frac{m\omega}{\hbar}x_C^2\right)=0$$

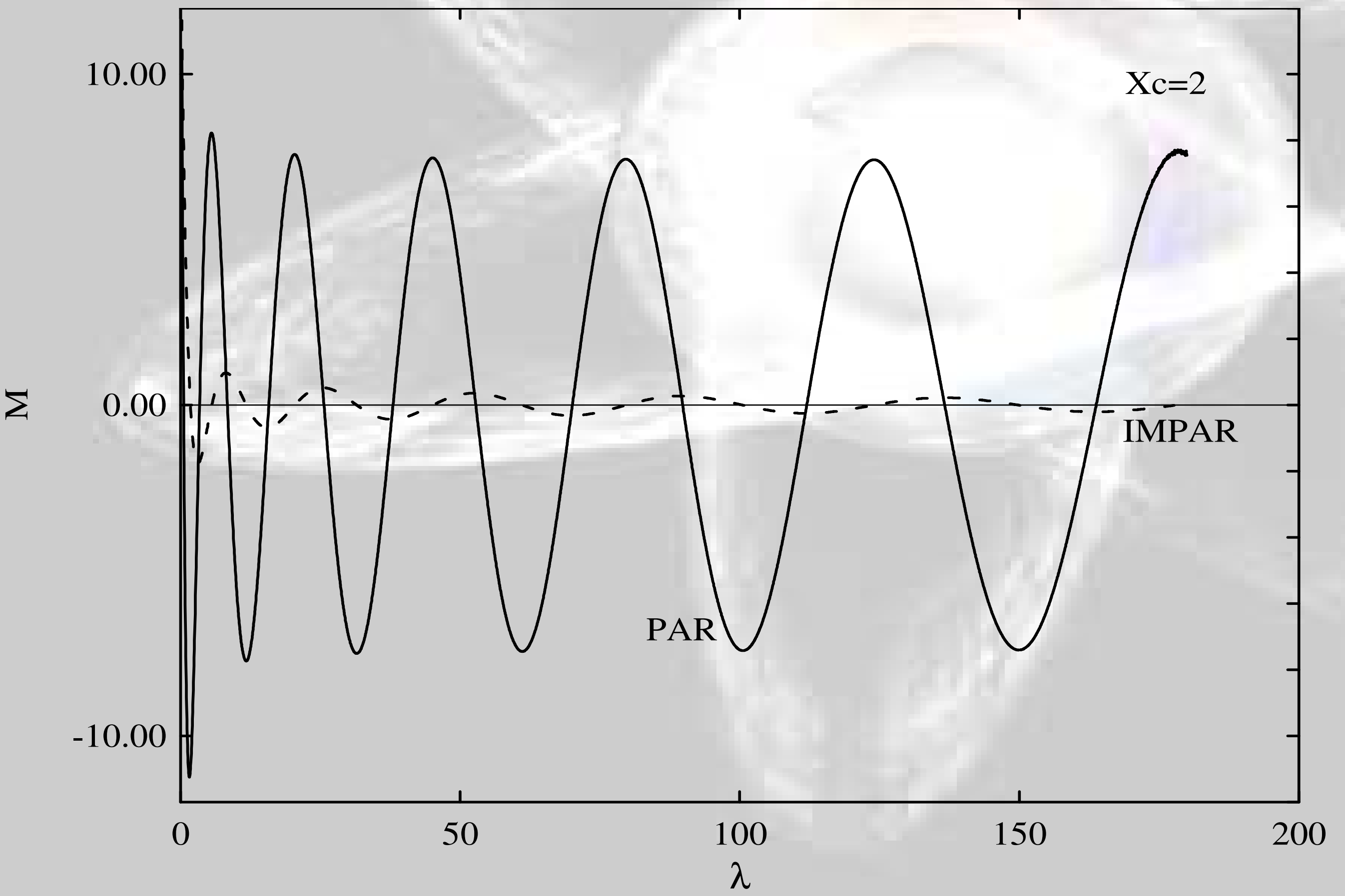
Calcula λ com a equação acima analisando a primeira vez que corta o eixo (estado fundamental).





2-Cálculo dos autovalores λ para o estado fundamental

Parâmetro de corte em função do autovalor.



X	λ
0.5	4.9511
1.0	1.2985
1.5	0.6889
2.0	0.5375
2.5	0.5050
3.0	0.5004
3.5	0.5001
4.0	0.5000
4.5	0.5000
5.0	0.5000

Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 3, p. 395 - 405, (2005)
www.sbfisica.org.br

Sobre o confinamento espacial de sistemas quânticos: O oscilador harmônico unidimensional e o átomo de hidrogênio

(On the spacial confinement of quantum systems: The one-dimensional harmonic oscillator and the hydrogen atom)

Marcos M. Almeida[1], Marcílio N. Guimarães[2] e Frederico V. Prudente[3]

Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Ba, Brasil
Recebido em 14/9/2004; Revisado em 15/4/2005; Aceito em 27/7/2005

X	λ
0.5	4.9511
1.0	1.2985
1.5	0.6889
2.0	0.5375
2.5	0.5050
3.0	0.5004
3.5	0.5001
4.0	0.5000
4.5	0.5000
5.0	0.5000

	Estado (n)			
x_c	0	1	2	3
0,5	4,9511	19,7745	44,4521	78,9969
1,0	1,2985	5,0756	11,2588	19,8997
1,5	0,6889	2,5050	5,2855	9,1354
2,0	0,5375	1,7648	3,3998	5,5846
2,5	0,5050	1,5514	2,7367	4,1843
3,0	0,5004	1,5061	2,5411	3,6642
3,5	0,5000	1,5004	2,5040	3,5233
4,0	0,5000	1,5000	2,5002	3,5017
4,5	0,5000	1,5000	2,5000	3,5001
5,0	0,5000	1,5000	2,5000	3,5000
∞	0,5000	1,5000	2,5000	3,5000

3-Cálculo da constante de normalização da função de onda

$$\Psi(x) = \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)A.M\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2};\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)$$

A desconhecido

λ conhecido

$$\int_{-XC}^{XC} \Psi^*\Psi dx = 1$$

↓

A

X	A
0.5	1.4149
1.0	1.0072
1.5	0.8450
2.0	0.7766
2.5	0.7554
3.0	0.7515
3.5	0.7512
4.0	0.7511
4.5	0.7511
5.0	0.7511

4-Cálculo dos valores esperados da posição e do momento

$$\Psi(x) = \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)A.M\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2};\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)$$

A e λ conhecidos

$$\langle F\rangle = \overline{F} = \int_{-Xc}^{Xc} \Psi^*(x)F(x,t)\Psi(x)\,dx$$

$$\langle x\rangle = \int_{-Xc}^{Xc} \Psi^*(x)x\Psi(x)\,dx$$

$$\langle p\rangle = \int_{-Xc}^{Xc} \Psi^*(x)\,\hat{p}\Psi(x)\,dx = \int_{-Xc}^{Xc} \Psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x)\,dx$$

4-Cálculo dos valores esperados da posição e do momento

$$\langle f(p)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(p)f(p)\Phi(p)dp$$

$$\langle p\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(p)p\Phi(p)dp$$

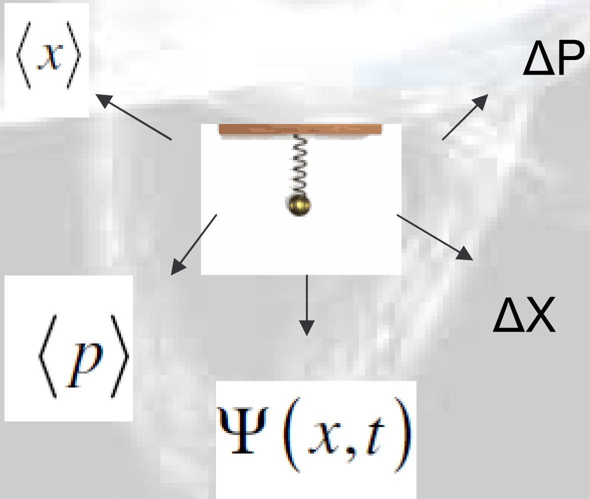
$$\Phi(p)=(1/2\pi)^{1/2}\int_{-Xc}^{Xc}\Psi(x)\exp(2\pi ipx/h)dx$$

Cálculo de Δx e Δp

- $\Delta x^2 = <x^2> - <x>^2$ $\qquad$ $\Delta p^2 = <p^2> - <p>^2$

- $<x> = <p> = 0$

- $\Delta x = (<x^2>)^{1/2}$ $\qquad$ $\Delta p = (<p^2>)^{1/2}$



Apoio:

CPqCTR

Centro de Pesquisas em Ciências e Tecnologias das Radiações

fapesb

Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia

IN ALTUM

UESC