



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ - UESC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
ÁLGEBRA LINEAR
ASSUNTO: MATRIZES
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Suponha que um corretor da Bolsa de Valores faça um pedido para comprar ações na segunda-feira, como segue: 400 quotas de ação A, 500 quotas da ação B e 600 quotas da ação C. As ações A, B e C custam por quota R\$ 500,00, R\$ 400,00 e R\$ 250,00, respectivamente.
- (a) Encontre o custo total de ações, usando multiplicação de matrizes.
- (b) Qual será o ganho ou a perda quando as ações forem vendidas seis meses mais tarde se as ações A, B e C custarem R\$ 600,00, R\$ 350,00 e R\$ 300,00 por quota, respectivamente?

RESPOSTAS

- (a) O custo total das ações é R\$550.000,00.
- (b) o lucro total foi de R\$45.000,00.
2. Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, térreo e colonial. A quantidade de material empregada em cada tipo de casa é dada pela matriz:

	<i>Ferro</i>	<i>Madeira</i>	<i>Vidro</i>	<i>Tinta</i>	<i>Tijolo</i>
<i>Moderno</i>	5	20	16	7	17
<i>Mediterrâneo</i>	7	18	12	9	21
<i>Colonial</i>	6	25	8	5	13

(Qualquer coincidência dos números com a realidade é mera coincidência.)

- (a) Se ele vai construir 5, 7 e 12 casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material são empregadas?
- (b) Suponha agora que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam, respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10 u.c.p.. Qual é o preço unitário de cada tipo de casa?

(c) Qual é o custo total do material empregado?

RESPOSTAS

Considere $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix}$

(a) As entradas, $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}$, da matriz $C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 146 & 526 & 260 & 158 & 388 \end{bmatrix}$ são as quantidades dos materiais ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo empregados na construção, respectivamente.

(b) Considere $H = \begin{bmatrix} 15 & 8 & 5 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ a matriz cujas entradas representam o preço por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo, respectivamente; e

$$E = B^t = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 20 & 18 & 25 \\ 16 & 12 & 8 \\ 7 & 9 & 5 \\ 17 & 21 & 13 \end{bmatrix}; \text{ Temos:}$$

$F = H \cdot E = \begin{bmatrix} 492 & 528 & 465 \end{bmatrix}$, as entradas f_{11}, f_{12} e f_{13} representam o preço unitário das casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente.

(c) O custo total será dado pelo produto matricial:

$$F \cdot A^t = \begin{bmatrix} 492 & 528 & 465 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix} = 11736,$$

ou seja, o custo total da construção será R\$11736,00.

3. Uma rede de comunicação tem cinco locais com transmissão de potências distintas. Estabelecemos que $a_{ij} = 1$, na matriz abaixo, significa que a estação i pode transmitir diretamente à estação j , $a_{ij} = 0$ significa que a transmissão da estação i não alcança a estação j . Observe que a diagonal principal é nula significando que uma estação não transmite diretamente para si mesma.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual seria o significado da matriz $A^2 = A \cdot A$?

$$\text{Seja } A^2 = [C_{ij}]. \text{ Calculemos o elemento } c_{42} = \sum_{k=1}^5 a_{4k}a_{k2} = 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 1.$$

Note que a única parcela não nula veio de $a_{43} \cdot a_{32} = 1 \cdot 1$. Isto significa que a estação 4 transmite para a estação 2 através de uma retransmissão pela estação 3, embora não exista uma transmissão direta de 4 para 2.

(a) Calcule A^2 . (Ver Apêndice.)

(b) Qual o significado de $c_{13} = 2$?

$c_{13} = \sum_{k=1}^5 a_{1k}a_{k3} = 0 + 1 + 0 + 1 + 0$, onde $a_{12}a_{23} = 1 = a_{14}a_{43}$. Ou seja, para a estação 1 transmitir para a estação 3, pode transmitir para a estação 2 e a estação 2 retransmitir para a estação 3, ou transmitir para a estação 4 e a estação 4 retransmitir para a estação 3.

(c) Discuta o significado dos termos nulos, iguais a 1 e maiores que 1 de modo a justificar a afirmação: "A matriz A^2 representa o número de caminhos disponíveis para se ir de uma estação a outra com uma única retransmissão". Ver o item (b).

(d) Qual o significado das matrizes $A + A^2$, A^3 e $A + A^2 + A^3$?

i. $A + A^2 = B$. As entradas b_{ij} significam o número de possibilidades de ir de uma estação i para uma estação j , transmitindo diretamente ou com apenas uma única retransmissão.

ii. $A^3 = D$. As entradas d_{ij} significam o número de possibilidades de ir de uma estação i para uma estação j , com exatamente duas retransmissões.

iii. $A + A^2 + A^3 = E$. As entradas e_{ij} significam o número de possibilidades de ir de uma estação i para uma estação j , transmitindo diretamente, com apenas uma única retransmissão ou com exatamente duas retransmissões.

(e) Se A fosse simétrica, o que significaria?

Significaria que uma estação i transmite diretamente para uma estação j se, e somente se, esta estação j transmite diretamente para a estação i .

4. Existem três marcas de automóveis disponíveis no mercado: o Jacaré, o Piranha e o Urubu. O termo a_{ij} da matriz \mathbf{A} abaixo é a probabilidade de que um dono de carro da linha i mude para o carro da coluna j , quando comprar um carro novo.

		<i>Para</i>		
		<i>J</i>	<i>P</i>	<i>U</i>
<i>De</i>	<i>J</i>	0,7	0,2	0,1
	<i>P</i>	0,3	0,5	0,2
	<i>U</i>	0,4	0,4	0,2

Os termos da diagonal de $A = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}$ dão a probabilidade a_{ii} de se comprar um carro novo da marca.

$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{59}{100} & \frac{7}{25} & \frac{13}{100} \\ \frac{11}{25} & \frac{39}{100} & \frac{17}{100} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} & \frac{4}{25} \end{bmatrix}$. Os termos de A^2 , a_{ij} , significam mudar da marca i para a marca j depois de duas compras:

De fato: a_{11} = probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca J mudar para um outro carro desta mesma marca, ou seja, J , depois de duas compras.

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 J & \frac{7}{10} & & J & \frac{7}{10} & & J & & & J & \frac{1}{10} & & U & \frac{4}{10} & & J \\
 & \rightarrow & & & \rightarrow & & & \rightarrow & & & \rightarrow & & & \rightarrow & &
 \end{array}$$

Daí, $a_{11} = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{59}{100}$.

a_{12} = probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca J mudar para um outro carro da marca P depois de duas compras.

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 J & \frac{7}{10} & & J & \frac{2}{10} & & P & & & J & \frac{1}{10} & & U & \frac{4}{10} & & P \\
 & \rightarrow & & & \rightarrow & & & \rightarrow & & & \rightarrow & & & \rightarrow & &
 \end{array}$$

Daí, $a_{12} = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{28}{100}$.

a_{13} = probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca J mudar para um outro carro da marca U depois de duas compras.

$$\begin{array}{c}
 J \quad \frac{7}{10} \quad J \quad \frac{1}{10} \quad U \\
 \rightarrow \qquad \qquad \rightarrow
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{c}
 J \quad \frac{2}{10} \quad P \quad \frac{2}{10} \quad U \\
 \rightarrow \qquad \qquad \rightarrow
 \end{array}
 \right|
 \begin{array}{c}
 J \quad \frac{1}{10} \quad U \quad \frac{2}{10} \quad U \\
 \rightarrow \qquad \qquad \rightarrow
 \end{array}$$

Daí, $a_{13} = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{13}{100}$.

a_{21} = probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca P mudar para um outro carro da marca J depois de duas compras.

$$\begin{array}{c}
 P \quad \frac{3}{10} \quad J \quad \frac{7}{10} \quad J \\
 \rightarrow \qquad \qquad \rightarrow
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{c}
 P \quad \frac{5}{10} \quad P \quad \frac{3}{10} \quad J \\
 \rightarrow \qquad \qquad \rightarrow
 \end{array}
 \right|
 \begin{array}{c}
 P \quad \frac{2}{10} \quad U \quad \frac{4}{10} \quad J \\
 \rightarrow \qquad \qquad \rightarrow
 \end{array}$$

Daí, $a_{21} = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{44}{100}$.

a_{22} = probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca P mudar para um outro carro desta mesma marca, ou seja, P , depois de duas compras.

$$\begin{array}{c}
 P \quad \frac{3}{10} \quad J \quad \frac{2}{10} \quad P \\
 \rightarrow \qquad \qquad \rightarrow
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{c}
 P \quad \frac{5}{10} \quad P \quad \frac{5}{10} \quad P \\
 \rightarrow \qquad \qquad \rightarrow
 \end{array}
 \right|
 \begin{array}{c}
 P \quad \frac{2}{10} \quad U \quad \frac{4}{10} \quad P \\
 \rightarrow \qquad \qquad \rightarrow
 \end{array}$$

Daí, $a_{22} = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{39}{100}$.

a_{23} = probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca P mudar para um outro carro da marca U depois de duas compras.

$$\begin{array}{c}
 P \quad \frac{3}{10} \quad J \quad \frac{1}{10} \quad U \\
 \rightarrow \qquad \qquad \rightarrow
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{c}
 P \quad \frac{5}{10} \quad P \quad \frac{2}{10} \quad U \\
 \rightarrow \qquad \qquad \rightarrow
 \end{array}
 \right|
 \begin{array}{c}
 P \quad \frac{2}{10} \quad U \quad \frac{2}{10} \quad U \\
 \rightarrow \qquad \qquad \rightarrow
 \end{array}$$

5. Em cada item a seguir, classifique as afirmações em verdadeiras ou falsas. Mostre caso a afirmação seja verdadeira ou dê um contra-exemplo, caso a afirmação seja falsa.

Considere $A_n(K)$, $B_n(K)$ e $P_n(K)$ onde $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

- (a) Se $\det(A) = 1$ então $A^{-1} = A$.
- (b) Se A é uma matriz triangular, então $\det(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$.
- (c) $\det(kA) = k^n \cdot \det(A)$, $k \in K$ é uma constante.
- (d) Se $A^2 = A$, e $A \neq I_n$ então $\det(A) = 0$.
- (e) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- (f) Se $B = P^{-1}AP$ então $\det(B) = \det(A)$.

RESPOSTAS

- (a) FALSA. Considere $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ sua inversa é: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
- (b) FALSA. Como consequência do Teorema de Laplace temos que: $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.
- (c) VERDADEIRA. Consequência do Teorema de Laplace.
- (d) VERDADEIRA. Como $A^2 = A \Leftrightarrow A(A - I) = 0$. Daí se $\det(A) \neq 0$ segue que $\exists A^{-1}$ e portanto teríamos $A = I_2$.
- (e) FALSA. Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e Considere $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Observe que $\det(A + B) = 1$ e $\det(A) = \det(B) = 0$.
- (f) VERDADEIRA. Use que: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ e que $\det(P) = \det(P^{-1})^{-1}$. Observe que neste item estamos supondo que P é uma matriz inversível, ou seja, $\det(P) \neq 0$.

6. Calcular o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SOLUÇÃO:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4 - L_1 \rightarrow L_4}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \sim \\ 2L_3 + L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4 + L_2 \rightarrow L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Observemos que ao escalonarmos a matriz realizamos a operação elementar $2L_3 + L_2 \rightarrow L_3$, alteramos o determinante da matriz do estágio anterior à operação, e portanto o

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \right),$$

$$\text{daí, o } \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{-60}{2} = -30.$$

$$L_4 + L_2 \rightarrow L_4$$

OBS: As operações elementares $L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3$ não alteraram o determinante da matriz do estágio

$$L_4 - L_1 \rightarrow L_4$$

anterior a respectiva operação. Por quê?

7. Chama-se posto de uma matriz ao número máximo de linhas linearmente independentes que ela possui.

Dado o sistema homogêneo

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}$$

prove que suas soluções formam um plano passando pela origem, uma reta passando pela origem ou se reduzem a um só ponto (a origem) cconforme a matriz dos coeficientes tenha posto 1, 2 ou 3.

RESPOSTA

O posto da matriz será 1 se , e somente se, os vetores normais dos planos (cada linha da matriz é uma equação de um plano que passa pela origem) são paralelos e neste caso a interseção,ou solução do sistema será um plano que passa pela origem.

O posto da matriz será 2 se, e somente se, temos um vetor normal como combinação linear dos outros dois e isto acontece se e somente se a solução é um reta.

O posto da matriz será 3 se, e somente se, os três vetores normais são linearmente independentes e neste caso a solução é um ponto. Convém observar que sistemas de equações lineares à 03 incógnitas pode ser resolvido apenas com a teoria desenvolvida em Geometria Analítica.

8. Determine os valores de x e y tais que a matriz abaixo seja ortogonal

$$\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 6 & x \\ 3 & 2 & y \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

RESPOSTA

$x = 3$ e $y = -6$.

9. Seja m uma matriz ortogonal 2×2 , prove que existe $\theta \in R$ tal que:

$$m = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ ou } m = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

conforme seja $\det(m) = 1$ ou $\det(m) = -1$.

SOLUÇÃO:

Como $m = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ é ortogonal segue que $m^{-1} = m^t = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$. Portanto $x^2 + y^2 = 1 = z^2 + w^2$ e $xz + yw = 0$. Observemos que se $y = 0$ se, e somente se $z = 0$ e $x = \pm w \neq 0$ ($x = 0$ se, e somente se $w = 0$ e $y = \pm z \neq 0$). Daí se $y = 0$ temos $m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Raciocínio análogo para o caso onde $x = 0$.

Vamos analisar o caso onde $x \cdot y \cdot z \cdot w \neq 0$. Neste caso teríamos $x = w$ e $y = -z$ ou $x = -w$ e $y = z$.

BIBLIOGRAFIA

- **BOLDRINE**, José Luiz. **COSTA**, Suelli I. Rodrigues. **FIGUEREDO**, Vera Lúcia. **WETZLER**, Henry G. Álgebra Linear. 3ª edição. Editora: HARBRA ltda.
- **LIMA**, Elon Lages. Geometria Analítica e Álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária. IMPA. SBM.

Este material foi elaborado e confeccionado pela
Profª Cláudia Ribeiro Santana (DCET-UESC).

APÊNDICE

1. Podemos utilizar um Software computacional, por exemplo o MAPLE, para facilitar os cálculos:

(a) [`> with(LinearAlgebra);`]

[`> A := Matrix([[400, 500, 600]]);`]

`A := [400 500 600]`

[`> B := Matrix([[500, 400, 250]]);`]

`B := [500 400 250]`

[`> A.Transpose(B);`]

`[550000]`

[`> C:=Transpose(B);`]

[`> R:=A.C;`]

`R := [550000];`

Daí, segue que O custo total das ações é $\mathbb{R}\$550.000,00$.

(b) Utilizando o Software computacional MAPLE, temos:

[`> with(LinearAlgebra);`]

[`> F:= Matrix([[600, 350, 300]]);`]

`F := [600 350 300]`

[`> G:= F-B;`]

`G := [100 -50 50]`

[`> R:=A.Transpose(G);`]

`R := [45000]`

Portanto, o lucro total foi de $\mathbb{R}\$45.000,00$.

2. Utilizando o Software computacional MAPLE, temos:

[> with(LinearAlgebra);

(a) [> A:= Matrix([[0,1,1,1,1], [1, 0, 1, 1, 0], [0, 1, 0, 1, 0], [0, 0, 1, 0, 1], [0, 0, 0, 1, 0]]);

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[> A . A;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) [> A . A . A;

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

[> A + A . A;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[> A + A. A + A. A. A;

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Vandermond

Objetivo: Provar usando indução que o determinante da matriz de Vandermond,

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

é igual ao produto

$$\prod_{1 \leq r < s \leq n} (a_s - a_r).$$

Dica: Assumindo que o resultado vale para todo n, considere o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & \cdots & a_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Mostre que este é igual a

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & f(a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & f(a_n) \\ 1 & a_{n+1} & \cdots & f(a_{n+1}) \end{vmatrix}$$

Para qualquer polinômio mônico f sobre K (=ℝ ou ℂ) de grau n. Escolha f de maneira que o determinante seja mais fácil de ser calculado.

**Este material foi elaborado e confeccionado pela
Prof^a Cláudia Ribeiro Santana (DCET-UESC).**