

# Laboratório de Física I

Prof. Adriano Hoth Cerqueira  
Profa. Alejandra Kandus  
Profa. Maria Jaqueline Vasconcelos

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas  
Universidade Estadual de Santa Cruz

21 de agosto de 2007

Material de apoio à disciplina Laboratório de Física I  
ministrada no segundo semestre de 2007

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
1.1	Guia geral de relatórios . . . . .	4
1.2	Média, desvio padrão, e desvio padrão da média . . . . .	6
1.3	Algarismos significativos e regras para arredondamento . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Representação de medidas em histogramas</b>	<b>11</b>
2.1	Introdução . . . . .	11
2.2	Material e métodos . . . . .	11
2.3	Roteiro experimental . . . . .	11
2.4	Guia para apresentação dos resultados . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Propagação de incertezas</b>	<b>13</b>
3.1	Introdução . . . . .	13
3.2	Material e métodos . . . . .	14
3.3	Roteiro experimental . . . . .	14
3.4	Guia para apresentação dos resultados . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Ajuste linear simples</b>	<b>16</b>
4.1	Introdução . . . . .	16
4.2	O método dos mínimos quadrados . . . . .	16
4.3	Material e método . . . . .	18
4.4	Roteiro experimental . . . . .	18
4.5	Guia para apresentação dos resultados . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Movimento circular uniforme</b>	<b>20</b>
5.1	Introdução . . . . .	20
5.2	Material e método . . . . .	21
5.3	Roteiro experimental . . . . .	21
5.4	Guia para apresentação dos resultados . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Forças coplanares e vantagem mecânica</b>	<b>23</b>
6.1	Introdução . . . . .	23
6.1.1	Forças coplanares . . . . .	23
6.1.2	Sistema de roldanas: uma máquina simples . . . . .	24
6.2	Material e método . . . . .	25
6.3	Roteiro experimental: parte A . . . . .	25
6.4	Roteiro experimental: parte B . . . . .	25

6.5	Guia para apresentação dos resultados . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Atrito estático</b>	<b>27</b>
7.1	Introdução . . . . .	27
7.2	Material e método . . . . .	28
7.3	Roteiro experimental . . . . .	28
7.4	Guia para apresentação dos resultados . . . . .	29
<b>8</b>	<b>Associação de molas em série e em paralelo</b>	<b>31</b>
8.1	Introdução . . . . .	31
8.2	Material e método . . . . .	31
8.3	Roteiro experimental . . . . .	32
8.4	Guia para apresentação dos resultados . . . . .	34
<b>9</b>	<b>Lançamento de projéteis</b>	<b>36</b>
9.1	Introdução . . . . .	36
9.2	Material e método . . . . .	38
9.3	Roteiro experimental . . . . .	38
9.4	Guia para apresentação dos resultados . . . . .	40
<b>10</b>	<b>Determinação de velocidade instantânea</b>	<b>42</b>
10.1	Introdução . . . . .	42
10.2	Material e método . . . . .	42
10.3	Guia para apresentação dos resultados . . . . .	43
<b>11</b>	<b>Referências</b>	<b>44</b>
<b>A</b>	<b>Derivadas parciais e propagação de incertezas</b>	<b>45</b>
<b>B</b>	<b>O método dos mínimos quadrados</b>	<b>48</b>

# 1 Introdução

Este documento tem o intuito de guiar o aluno ao longo do curso de Laboratório de Física I. Ao longo do semestre, faremos aproximadamente 10 experimentos. Estes experimentos estão associados à disciplina de Física I e servirão, basicamente, como apoio aos fundamentos da Mecânica e à correta manipulação estatística dos dados e obtenção das incertezas. Cada experimento será precedido de um roteiro, que auxiliará tanto na realização do experimento quanto na confecção do relatório. Todos os roteiros serão aqui apresentados.

É importante observar o compromisso com a realidade, atentando para a correta e responsável obtenção do mensurando em consideração. Desvios da conduta responsável na condução do experimento levará, inexoravelmente, a erros grosseiros e, obviamente, à não obtenção de resultados adequados.

Todo experimento deverá ser acompanhado de um relatório. Na próxima seção, apresentaremos um Guia geral para sua elaboração. Antes, contudo, é necessário esclarecer alguns pontos com relação ao mesmo.

Os relatórios deverão ser entregues 7 dias após a realização do experimento (salvo na presença de feriados, onde o prazo poderá ser aumentado). Eles deverão conter uma estrutura padrão, conforme indicado na próxima seção. Lembrem-se de que os relatórios serão avaliados, e esta avaliação poderá influenciar decisivamente no desempenho final do aluno. Os relatórios deverão ser individuais, e não se admitirá a existência de relatórios idênticos. Caso isto ocorra, os relatórios com conteúdo idêntico (ou parcialmente) serão anulados.

Aconselha-se ao aluno fazer uso extensivo desta apostila (a qual, além dos roteiros que deverão ser lidos antes da aula, contém informações, regras e conceitos básicos importantes para a realização de bons relatórios) e, quando necessário, da bibliografia associada. Ambos terão um papel fundamental ao longo do curso e, sem a consulta periódica a ambos, muito do que será exposto em sala poderá não ser apreendido.

## 1.1 Guia geral de relatórios

Os relatórios deverão conter, necessariamente, a seguinte estrutura mínima:

- **Título e autores;**

- **Introdução:** Utilize os livros disponíveis na literatura sugerida e procure fazer uma boa introdução ao assunto tratado na experiência, enfatizando, se possível, os objetivos a serem atingidos com a mesma. Utilize equações se for necessário (quase sempre será!). Como sugestão, não ultrapasse uma página com a introdução. Note que a introdução serve para guiar o leitor no experimento. Portanto, evite frases vagas ou não relacionadas diretamente com o assunto. Se, por exemplo, o experimento envolver a determinação da constante gravitacional, inicie a introdução objetivamente, como a seguir: “Neste experimento vamos medir a aceleração da gravidade local utilizando-se de um pêndulo. Faremos medidas consecutivas do período de oscilação do pêndulo e, através da equação (1) abaixo determinar o valor de  $g$ .”. Evite coisas do gênero: “É muito importante na física determinar o valor da aceleração gravitacional...” Elas deslocam o foco do trabalho e não servem de muita coisa.
- **Metodologia e Materiais:** Procure delinear as etapas principais do experimento, fazendo diagramas e/ou esboços do experimento sempre que possível. Relacione os materiais utilizados, e a seqüência de obtenção dos dados. Procurem ser sucintos, mas precisos.
- **Apresentação dos resultados:** Introduza os dados experimentais em tabelas claras e objetivas. Introduza o significado de cada coluna da tabela no próprio texto, de modo que o leitor possa “ler” a tabela corretamente. Apresente as equações pertinentes, tanto para a obtenção de um determinado resultado como aquelas necessárias para o tratamento das incertezas, propagação de incertezas e ajuste de curvas por métodos analíticos. Explique aparente controvérsias nos dados experimentais. Procure fazer gráficos (quando for o caso) e, assim como nas tabelas, coloque uma legenda sintética e sua apresentação detalhada no texto principal. Não se esqueçam das unidades (em geral, S.I.), arredondamentos e escalas (em gráficos).
- **Conclusões:** Aqui as conclusões do relatório deverão ser explicitadas, com base nos resultados obtidos. Façam uma análise crítica dos dados experimentais e sua concordância (ou não) com a modelagem do fenômeno. Se utilizarem livro de apoio, ou material da internet, façam uma seção, ao final, com as referências utilizadas. Assim como no item “Introdução” acima, evitem frases vagas como “Vimos que é

muito importante determinar a constante...”. Conclusões devem conter, necessariamente, um resumo do resultado principal alcançado. Por exemplo: “Neste experimento, determinamos o valor da aceleração local da gravidade através de medidas do período do pêndulo simples. Obtivemos um valor de  $g = (9,5 \pm 0,5) \text{ m/s}^2$ . O valor encontrado está próximo ao valor esperado para  $g$  no nível do mar, e em nossa latitude, obtido através da equação  $g \approx 9,785(1 + 0,00529\text{sen}^2\lambda) \text{ m/s}^2$  (onde  $\lambda$  é a latitude; ver Nussenzveig 2002), e, dentro dos desvios calculados, correto.”

## 1.2 Média, desvio padrão, e desvio padrão da média

No decorrer do semestre, vários conceitos relativos ao correto tratamento dos dados adquiridos em laboratório deverão ser utilizados. Em particular, devemos estar cientes de que as incertezas são essenciais na discussão de um resultado experimental. Ela pode ser obtida diretamente de um experimento (no caso em que flutuações estatísticas em torno de um valor médio nos permitir avaliar as incertezas que chamamos de incertezas do tipo A e, também, no caso em que se é possível modelar as fontes das incertezas que chamamos incertezas do tipo B; aqui, em geral, dada pelo limite de resolução do aparelho de medida) ou, o que é mais comum, ela pode advir da composição de incertezas avaliadas experimentalmente. Neste caso, devemos nos atentar para a correta propagação de incertezas, que envolve conceitos de múltiplas derivadas parciais, como veremos a seguir. No que se segue, faremos um compêndio das equações que nos serão úteis no tratamento dos dados.

- **Média (ou valor médio):** Uma série de medidas de uma mesma grandeza resultará no valor médio (ou valor mais provável), que deverá ser dado pela seguinte equação:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (1)$$

onde  $\bar{y}$  é o valor médio,  $N$  é o número total de medidas realizadas e  $y_i$  é o valor da  $i$ -ésima medida.

- **Desvio:** o desvio de um conjunto de medidas é dado pela diferença entre cada valor medido e o valor médio:

$$\delta_i = y_i - \bar{y} \quad (2)$$

- **Desvio médio:** o desvio médio é a média dos valores absolutos dos desvios:

$$\bar{\delta}_i = \frac{\sum_{i=1}^N |\delta_i|}{N} \quad (3)$$

- **Variância:** a variância está intimamente relacionada com o desvio padrão. A variância que nos fornece a melhor estimativa experimental para o desvio padrão é dada pela seguinte equação:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \quad (4)$$

Esta equação assume que estamos utilizando um espaço amostral, e que o valor  $\bar{y}$  é o valor médio do mensurando. Por isto ela é conhecida como *melhor estimativa experimental da variância*. Esta abordagem é distinta de, por exemplo, admitirmos a existência de um *valor verdadeiro*,  $y_{ver}$ , para o mensurando. Caso existisse, a variância deveria ser estimada utilizando-se a seguinte equação:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_{ver})^2 \quad (5)$$

Esta equação é frequentemente utilizada quando se analisa a estatística de uma população (em detrimento de amostras).

- **Desvio padrão:** o desvio padrão é a raiz quadrada da variância. A partir do item anterior, podemos definir, então, a *melhor estimativa experimental do desvio padrão* e o *desvio padrão* como sendo, respectivamente, dados por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \quad (6)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \quad (7)$$

- **Desvio padrão do valor médio:** Define-se o *desvio padrão do valor médio* (que será usado para expressar a incerteza final no valor do mensurando) como sendo dada por:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (8)$$

- **Incerteza padrão:** na ausência de uma estimativa para os erros sistemáticos, a incerteza padrão é dada pelo desvio padrão do valor médio, descrito acima. Caso os erros sistemáticos possam ser avaliados, define-se a incerteza padrão como sendo dada por:

$$\sigma_p^2 = \sigma_m^2 + \sigma_r^2 \quad (9)$$

onde o primeiro termo desta equação é o desvio padrão do valor médio e o segundo termo é a chamado incerteza sistemática residual (ou incerteza do tipo B; em geral, difícil de se obter). Uma regra simples, que independe de modelagem, pode ser assim considerada:

$$\sigma_r = \sigma_B \simeq \frac{L_r}{2} \quad (10)$$

onde  $\sigma_r$  é a incerteza sistemática residual (ou incerteza do tipo B,  $\sigma_B$ ),  $L_r$  é o limite de erro de calibração do instrumento. Como uma estimativa (pobre) do limite do erro de calibração, pode-se utilizar a menor divisão que é explicitamente indicada pelo instrumento de medida. Esta discussão é mais complexa do que a aqui apresentada, mas vamos nos ater a esta simplificação. Para maiores detalhes, consulte o capítulo 5 em Vuolo (2004).

### 1.3 Algarismos significativos e regras para arredondamento

Em primeiro lugar é preciso dizer que não é muito clara a definição da apresentação do mensurando (já com suas incertezas calculadas). Como regra

geral, utilizaremos a convenção de apenas um algarismo significativo na apresentação da incerteza, ou dois, no máximo, caso seja pertinente.

Como exemplo, suponha que o desvio padrão de um conjunto de medidas seja dado por  $\sigma = 0,144$  m. A forma correta de apresentar este desvio seria  $\sigma = 0,14$  m, ou ainda  $\sigma = 14$  cm. Note que ambas as formas têm dois algarismos significativos, ao contrário do cálculo original. Quase sempre, escrever mais algarismos significativos na expressão da incerteza não faz sentido. O capítulo 5 do livro Fundamentos da Teoria de Erros contém informações detalhadas a respeito dos procedimentos adequados para a apresentação das incertezas.

Como um exemplo, suponha que um resultado experimental e a respectiva incerteza sejam dados por:

$$y = 0,0004639178 \text{ m}$$

$$\sigma = 0,000002503 \text{ m}$$

Neste caso, como a incerteza padrão deve ter no máximo dois algarismos significativos, deveremos reescrevê-la como:

$$\sigma = 0,000025$$

logo, o mensurando deverá ser reescrito:

$$y = 0,0004639$$

Como regra geral, deve-se evitar muitos zeros á esquerda, não significativos. Pode-se fazer isto convertendo-se a unidade ou apresentar o resultado em notação científica (melhor). Ambos os resultados abaixo são corretos:

$$y = 0,4639 \text{ mm}$$

$$\sigma = 0,0025 \text{ mm}$$

$$y = 4,639 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\sigma = 0,025 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Como regra para arredondamento de números adotaremos o seguinte critério. Soma ou subtração de duas quantidades deverá possuir o mesmo número de algarismos significativos. Quando houver algarismos significativos excedentes, limita-se excluindo-os do resultado (e.g., Vuolo 2004). Suponha que o número abaixo possua três algarismos significativos (W, Y e X) e quatro em excesso (A, B, C e D):

$W, YXABCD$ 

Logo, a regra será:

- de X000 a X499, os algarismos excedentes, não significativos, são simplesmente eliminados;
- de X500 a X999, os algarismos excedentes são eliminados e o algarismo X aumenta de 1 (arredondamento para cima);
- no caso de X500000 (muito comum), então o arredondamento deve ser tal que o algarismo X depois do arredondamento deve ser par.

Veja a seguir, alguns exemplos:

$$2,43 \rightarrow 2,4 \quad 3,688 \rightarrow 3,69 \quad 5,6500 \rightarrow 5,6 \quad 5,7500 \rightarrow 5,8$$

$$5,6499 \rightarrow 5,6 \quad 5,6501 \rightarrow 5,7 \quad 9,475 \rightarrow 9,48 \quad 3,325 \rightarrow 3,32$$

Note que na soma, subtração, multiplicação e divisão de números com uma quantidade de algarismos significativos diferentes, deve-se apresentar o resultado com um número de algarismos significativos igual ao da medida mais pobre em algarismos significativos. Por exemplo,  $(5,5 \text{ g}) \times (4,45 \text{ m/s}) = 24,5 \text{ gm/s}$ . Note que mantivemos um algarismo após a vírgula, consistentemente com a medida mais pobre em algarismo significativo (5,5g). Neste caso, o resultado final ficou com três algarismos porque o produto de  $5 \times 4$  produz dois algarismos significativos.

## 2 Representação de medidas em histogramas

### 2.1 Introdução

Nesta experiência vamos utilizar o micrômetro para a realização de medidas do diâmetro de palitos de madeira. Nosso objetivo será mostrar que um grande número de medidas desta mesma quantidade (o diâmetro) irá resultar em uma distribuição em torno de um valor médio. Deveremos, então, calcular os desvios (desvio padrão e melhor valor experimental para o desvio padrão) e obter histogramas da distribuição dos diâmetros. Finalmente, apresentar o valor da medida corretamente.

### 2.2 Material e métodos

Esta experiência será realizada com amostras de 500 palitos de madeira. Seus diâmetros serão medidos com um micrômetro de  $10\ \mu\text{m}$ .

### 2.3 Roteiro experimental

- Utilizem o micrômetro para realizar as medidas do diâmetro dos palitos fornecidos. Anotem as características do micrômetro, avaliem seus limites de erro e sua escala;
- Façam 100 (cem) medidas do diâmetro dos palitos a partir da amostra fornecida. Lembrem-se de, após realizar uma medida, voltar com o palito escolhido para a amostra, de modo a dar igual probabilidade de que cada palito da amostra seja escolhido; discuta esta questão no relatório;
- Anotem em uma tabela os resultados obtidos, na ordem em que foram observados;

### 2.4 Guia para apresentação dos resultados

- Consulte o Guia Geral de Relatórios contido neste caderno e utilize-o para a confecção do seu relatório;

- Apresente a tabela com os dados obtidos;
- Calcule o valor médio do mensurando, o desvio padrão, o desvio padrão do valor médio e apresente o valor do mensurando (ou seja, seu valor médio acompanhado de sua incerteza). Você saberia dizer algo sobre o cálculo da incerteza padrão? Discuta isto nos resultados.
- Divida o intervalo dos mensurandos encontrados em 7 partes. Para isto, primeiro identifique o valor mínimo obtido para o mensurando e, também, o valor máximo. Subtraia o valor máximo do valor mínimo e encontre o intervalo  $\Delta$ . Assim:  $\Delta = y_{max} - y_{min}$ . Divida este intervalo em 7 partes iguais.
- Subdivida sua amostra e encontre o número de medidas dentro de cada intervalo definido anteriormente. Assim, obtenha a frequência de ocorrência  $N(y)$  do mensurando em cada intervalo e, conseqüentemente, a frequência de ocorrência relativa,  $F(y) = N(y)/N$ .
- Apresente um histogramas com sete (7) intervalos (definido pela diferença entre o maior valor e o menor valor do mensurando), contendo as frequências relativas em função do intervalo considerado. Discuta o resultado.
- Repita o procedimento anterior para um número menor de dados. Considere, por exemplo, de sua tabela com 100 medidas, apenas as cinco primeiras, apenas as 10 primeiras e, finalmente, apenas as 50 primeiras. Construa os histogramas de cada uma destas sub-amostras e compare com o histograma contendo a amostra com 100 medidas. Discuta o resultado.

## 3 Propagação de incertezas

### 3.1 Introdução

Quando calculamos grandezas derivadas, ou seja, grandezas que não podem ser medidas diretamente através dos instrumentos disponíveis, temos um problema: Como propagar as incertezas individuais? Talvez um exemplo possa nos ajudar. Neste caso em particular, vamos medir a densidade de diferentes cilindros, compostos por diferentes materiais (de diferentes densidades). Como sabemos:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (11)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $m$  é a massa e  $V$  é o volume. Como os volumes a serem medidos são cilindros, a massa será dada pela indicação em uma balança e, seus volumes, serão dados por:

$$V = \pi R^2 \cdot h \quad (12)$$

onde  $R$  é o raio do cilindro e  $h$  sua altura média.

Note que aqui temos um problema. O que queremos, ao final, é a determinação da densidade e sua incerteza. Logo, o que queremos é determinar  $\sigma_\rho$ . Mas, como vemos pelas duas equações acima, temos que primeiro determinar as incertezas na massa e no volume. Esta, por sua vez, depende da incerteza na determinação do raio e da altura do cilindro. Assim, de acordo com a teoria de propagação de incertezas (ver Apêndice A), teremos:

$$\sigma_\rho^2 = \left( \frac{\partial \rho}{\partial m} \right)^2 \sigma_m^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial V} \right)^2 \sigma_V^2 \quad (13)$$

Nesta equação,  $\sigma_\rho$  é a incerteza na determinação da densidade,  $\sigma_m$  é a incerteza na determinação da massa, e  $\sigma_V$  a incerteza na determinação do volume. Ora,  $\sigma_m$  é fácil de se obter (estatisticamente ou não), porque se trata de um mensurando. Mas o que fazer com a incerteza no volume?

Bom, temos que *calcular* a incerteza que advém da equação (12) e, depois, voltar à equação (13). Façamos isto. Para calcular a incerteza no volume, temos:

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2 \quad (14)$$

onde, agora,  $\sigma_R$  é a incerteza na determinação do raio do cilindro e  $\sigma_h$ , a incerteza na sua altura. Ambos mensurandos e passíveis de serem obtidos com um paquímetro.

Vocês podem mostrar facilmente que, calculando as derivadas parciais, podemos obter (façam esta dedução no relatório):

$$\left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2 = \left[\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2\right] \quad (15)$$

Definindo  $\epsilon_y = \sigma_y/y$  como sendo as incertezas relativas, teremos, a partir da equação acima, uma equação bem simples de ser calculada:

$$\epsilon_\rho = \sqrt{\epsilon_m^2 + 4\epsilon_R^2 + \epsilon_h^2} \quad (16)$$

Note que todos os termos podem ser determinados a partir do experimento, se medirmos massa, altura e raio de um cilindro uniforme.

## 3.2 Material e métodos

Serão utilizados cilindros de metal e madeira. Seus diâmetros e alturas serão medidos com um paquímetro e suas massas com uma balança.

## 3.3 Roteiro experimental

- Escolha pelo menos três cilindros de diferentes materiais;
- Meça, com um paquímetro, o diâmetro e a altura dos cilindros (dê um nome, ou número que identifique o cilindro com suas características). Sugere-se tomar pelo menos 20 medidas para o diâmetro e a altura (cada membro do grupo pode realizar uma série de medidas, em diferentes posições). Anote os resultados em uma tabela. Estas medidas fornecerão um valor médio para o raio e a altura de cada cilindro, juntamente com seus desvios ( $\sigma_R$  e  $\sigma_h$ , ou ainda,  $\epsilon_R$  e  $\epsilon_h$ );
- Meça, com uma balança de precisão, a massa de cada cilindro. Se houver mais de uma balança, sugere-se a medida da massa em cada

uma das balanças (desde que tenham a mesma precisão indicada). Se houver uma única balança, sugere-se estimar a incerteza a partir da menor divisão indicada. (Isto é razoável? Discuta no relatório este procedimento.)

### 3.4 Guia para apresentação dos resultados

- Consulte o Guia Geral de Relatórios contido neste caderno e utilize-o para a confecção do seu relatório;
- Apresente as tabelas, identificando cada cilindro, com os dados obtidos para o raio, altura e massa;
- Calcule (e mostre como obteve) os desvios para cada uma das variáveis acima;
- Deduza a equação (15) e obtenha a incerteza para a densidade. O valor encontrado é razoável? Discuta no relatório.
- Apresente o resultado final (valor mais provável mais incerteza) para cada cilindro medido.

## 4 Ajuste linear simples

### 4.1 Introdução

Muitas vezes sabemos que uma grandeza se comporta linearmente com relação à (pequenas) variações em outra grandeza. Esta é, por exemplo, a relação que existe entre a força elástica em uma mola e a deformação da mesma. Em outras palavras:

$$|F_{el.}| \propto \Delta x \quad (17)$$

onde  $F_{el.}$  é a força elástica (em uma dimensão: vamos simplificar nosso problema) e  $\Delta x = x - x_0$  a deformação líquida sofrida pela mola com relação à sua posição de repouso ( $x_0$ ).

Assim, se determinamos experimentalmente vários  $\Delta x$ 's, podemos, em princípio, obter a constante de proporcionalidade na equação (17) acima. Esta constante, como sabemos, chama-se *constante elástica da mola*, e a equação abaixo é conhecida como Lei de Hooke<sup>1</sup>:

$$|F| = K \Delta x \quad (18)$$

A questão que podemos nos colocar é a seguinte: Suponha que tenhamos realizado o experimento e tenhamos obtido o seguinte gráfico de força versus deformação (ver Figura 1). Note que os pontos devem representar uma reta, pois sabemos que o fenômeno se comporta linearmente. Mas eles não estão absolutamente alinhados! O que fazer nestes casos?

### 4.2 O método dos mínimos quadrados

Nestes casos, utilizamos o conceito de *regressão linear*, que permite-nos obter o melhor ajuste possível aos dados experimentais. Como aqui, neste caso em particular, estamos interessados no ajuste de uma reta, vamos, então,

---

<sup>1</sup>Note que estamos simplificando o problema: sabemos que esta lei é válida apenas no regime elástico da mola, onde ela responde linearmente à deformação. Fora deste regime, para deformações crescentes, a mola tende a se romper e, nesta região, a Lei de Hooke não é mais válida.

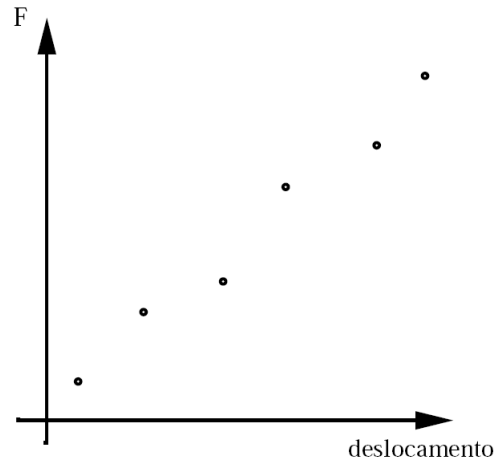


Figura 1: Gráfico hipotético da relação experimental entre os deslocamentos líquidos e a força em uma mola

empregar o ajuste linear simples (para maiores detalhes, veja o Apêndice B). Ou seja, supondo que:

$$y = ax + b$$

teremos:

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (19)$$

$$a = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (20)$$

Estas equações são uma consequência do método dos mínimos quadrados, cujos fundamentos teóricos estão descritos no Apêndice B (ver, também, Vuolo 1996). Nestas equações, os símbolos têm seus significados usuais:  $N$  é o número de pontos,  $x_i$  é a coordenada  $x$  para cada ponto  $i$  (no nosso caso aqui, as deformações líquidas da mola) e  $y_i$  a coordenada  $y$  para os pontos  $x_i$  (no nosso caso, a força restauradora da mola).

Sabemos obter experimentalmente as deformações líquidas (basta medir com uma régua as posições inicial e final de equilíbrio da mola). Como obter a força elástica da mola? No nosso modelo, vamos utilizar a força gravitacional como auxílio e nos lembrarmos de uma equação básica da mecânica: no

referencial do laboratório, um corpo estará em repouso desde que o somatório das forças aplicadas ao mesmo seja igual a zero. Logo, se dependurarmos uma mola em uma haste vertical e, se dependurarmos uma massa  $m$  na extremidade livre da mola, teremos:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = 0 &\longrightarrow \vec{P} + \vec{F}_{el.} = m\vec{g} - k\vec{x} = 0 \longrightarrow m\vec{g} = k\vec{x} \\ &\longrightarrow |\vec{F}_{el.}| = |\vec{P}| \end{aligned}$$

Em outras palavras, na posição de equilíbrio, o peso de uma massa dependurada verticalmente em uma mola equivale à força elástica da mola. Basta, então, medirmos o peso das massas dependuradas e fazer um gráfico da deformação da mola versus peso. Com estes dados, calculamos a constante elástica da mola através da equação (20).

### 4.3 Material e método

Massas, molas, suporte, haste vertical e balança.

### 4.4 Roteiro experimental

- Fixe a haste graduada vertical no bloco de madeira.
- Prendam de forma adequada a mola e o suporte para as massas na haste vertical que acompanha o experimento.
- Meça com uma balança cada massa antes de colocá-la na extremidade da mola. Meça, também, antes de colocar a massa, a posição de equilíbrio da mola (sem a massa).
- Com a massa adicionada, meça novamente a posição de equilíbrio.
- Faça isto repetidas vezes, mas adicionando-se cada vez uma massa maior. Tente obter, no mínimo, 7 valores de massas diferentes (para termos pelo menos 7 pontos no gráfico; ou seja,  $N = 7$ ).
- Lembrem-se de obter as incertezas na massa e nas deformações (Sugestão: cada membro do grupo pode medir, de forma independente, o valor para as deformações e para as massas; basta fazer, cada um, uma

leitura e anotar os resultados numa tabela para depois obter o valor médio).

#### 4.5 Guia para apresentação dos resultados

- Consulte o Guia Geral de Relatórios contido neste caderno e utilize-o para a confecção do seu relatório;
- Na introdução, discuta a Lei de Newton correspondente que utilizamos aqui no experimento e, também, a Lei de Hooke. Procure mostrar (com gráficos ou exemplos) que a Lei de Hooke tem um limite de validade;
- Discuta o método dos mínimos quadrados na introdução e enfatize sua importância no presente experimento;
- Fique livre para utilizar um valor de  $g$  que mais lhe convier; mas justifique no relatório sua utilização;
- Faça um esboço do arranjo experimental, definindo quem é a posição de equilíbrio da mola sem massas e, após a adição das mesmas, identifique no esboço a deformação e o deformação líquida;
- Faça um gráfico com os pontos experimentais obtidos (não se esqueçam das unidades);
- Reescreva as equações utilizadas (para o cálculo dos coeficientes linear e angular), e apresente os resultados obtidos;
- Avalie o desvio no cálculo da constante elástica da mola, a partir das equações disponíveis no Apêndice B.
- Calcule o coeficiente linear da reta e seu respectivo desvio. O valor encontrado é razoável? Porque?
- Apresente suas conclusões e discuta seus resultados.

## 5 Movimento circular uniforme

### 5.1 Introdução

Um corpo que percorre uma trajetória circular, percorrendo ângulos iguais em tempos iguais, está em movimento circular uniforme (MCU). Esse movimento pode ser caracterizado pela velocidade angular (ou frequência angular):

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

A velocidade tangencial, ou linear, é definida por:

$$v_t = \frac{ds}{dt}$$

onde  $s$  é o arco de circunferência. Se a trajetória circular tem um raio  $R$ , as velocidades tangencial e angular estarão relacionadas da seguinte forma:

$$v_t = R\omega$$

Pelo fato do corpo mudar a sua direção de movimento, mesmo mantendo sua velocidade tangencial constante, o MCU é um movimento acelerado. Isto porque o vetor velocidade da partícula, o vetor  $\vec{v}_t$ , muda continuamente sua direção. A aceleração aponta para o centro do círculo, e é chamada de aceleração centrípeta. É possível demonstrar (façam isto) que sua expressão matemática é dada por:

$$a_c = \frac{v_t^2}{R} = \omega^2 R$$

No processo de dedução desta equação, é comum projetar as componentes da velocidade da partícula em duas dimensões:  $x$  e  $y$ . É muito fácil verificar que ambas as projeções são do tipo:

$$v_x = v_t \cos\theta$$

$$v_y = v_t \sin\theta$$

onde  $\theta = \omega t + \phi$  ( $\phi$ , aqui, é o ângulo de fase) ou, em outras palavras, que a projeção da partícula sobre os eixos  $x$  e  $y$  descreve um movimento harmônico simples (MHS).

Neste experimento, vamos verificar certas propriedades do MCU e, com a projeção do mesmo em um dos eixos ordenados, também do MHS.

## 5.2 Material e método

Aparelho rotacional projetável (CIDEPE), cronômetro ou relógio de pulso, retroprojetor, corpo de prova esférico (esfera de isopor), fita adesiva, anteparo de projeção (cartolina ou papel de dimensões compatíveis, presa com fita adesiva na parede, e que será riscado).

Utilizaremos o aparelho rotacional, projetado na parede com o auxílio de um retroprojetor. A projeção nos permitirá obter o período de rotação e, também, analisar propriedades do movimento harmônico simples.

## 5.3 Roteiro experimental

- Monte o aparelho rotacional projetável com uma esfera pequena em um determinado raio. Obtenha a melhor estimativa para o raio.
- Ligue o aparelho e escolha uma frequência adequada de rotação. Obtenha a melhor estimativa para o período do MCU.
- Projete o sistema, de perfil, na parede (use o retroprojetor). Certifique-se de que o objeto, quando projetado na parede, executa um MHS. Obtenha um valor para o período do MHS.
- Determine a amplitude do MHS.

## 5.4 Guia para apresentação dos resultados

- Consulte o Guia Geral de Relatórios contido neste caderno e utilize-o para a confecção do seu relatório;
- Apresente os valores para o período do MCU e o raio de sua trajetória. Calcule a velocidade tangencial e a aceleração centrípeta do MCU.
- Obtenha os valores para a velocidade tangencial e para a aceleração centrípeta, a partir do MCU.

- Apresente os valores para o período do MHS e sua amplitude, com seus respectivos desvios, e compare (nas conclusões) os valores com os obtidos do MCU.
- Mostre, analiticamente, que um corpo executando MCU em um plano  $x-y$ , possui um MHS ( $y = A\cos(\omega t + \phi)$ ) quando projetado sobre cada eixo em separado.
- Com a amplitude e o período do MHS determinado em laboratório, escreva uma equação para o MHS.
- A partir desta equação, obtenha as equações para i) a velocidade da partícula e ii) a aceleração da partícula.
- A partir destas equações, você poderia calcular a velocidade tangencial da partícula executando MCU e sua aceleração centrípeta. Como? Obtenha estes valores e compare com aqueles obtidos no MCU.

## 6 Forças coplanares e vantagem mecânica

### 6.1 Introdução

#### 6.1.1 Forças coplanares

Considere um objeto pontual, de massa  $m$ , sobre o qual atuam  $n$  forças. Como a força é uma grandeza vetorial, a soma de todas elas será dada pela expressão:

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Onde  $\vec{F}_r$  é a resultante das  $\vec{F}_i$  forças aplicadas no objeto em questão. A equação anterior pode ser também escrita em termos das componentes de cada força. Num sistema coordenadas cartesianas, teremos:

$$\vec{F}_r = (F_x, F_y, F_z) = \sum_{i=1}^n (F_{x,i}, F_{y,i}, F_{z,i}) = \left( \sum_{i=1}^n F_{x,i}, \sum_{i=1}^n F_{y,i}, \sum_{i=1}^n F_{z,i} \right)$$

Nesta equação,  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  são as componentes da força resultante nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e  $F_{x,i}$  é componente no eixo  $x$  da  $i$ -ésima força aplicada no objeto.

O corpo em questão estará em equilíbrio quando a força resultante for nula. Em outras palavras:

$$\vec{F}_r = 0 \longrightarrow \left( \sum_{i=1}^n F_{x,i} = 0, \sum_{i=1}^n F_{y,i} = 0, \sum_{i=1}^n F_{z,i} = 0 \right)$$

Nosso objetivo no presente experimento é obter a resultante de um conjunto de forças atuando em um objeto (ponto), verificar a validade da equação acima, e confeccionar diagramas de força.

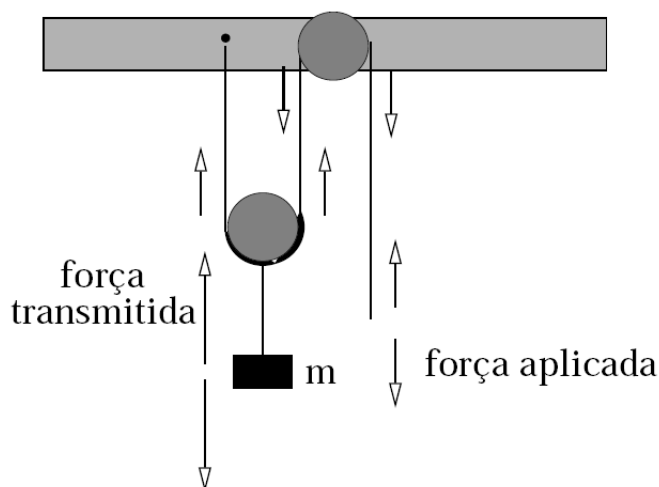


Figura 2: Sistema de roldanas

### 6.1.2 Sistema de roldanas: uma máquina simples

Quando suspendemos um objeto de massa  $m$  qualquer, preso por uma corda, por exemplo, e o mantemos em equilíbrio, toda o seu peso nos é transmitido através de uma tensão na corda. Assim, segundo a lei da inércia de Newton:

$$\sum F = 0 \longrightarrow T = P$$

onde  $T$  é a tensão e  $P$  o peso do objeto dependurado (note que estamos assumindo forças co-lineares e, portanto, desprezando o caráter vetorial das mesmas). Consideremos, por exemplo, a Figure 2, na qual um objeto de massa  $m$  está suspenso, em equilíbrio, por um sistema de cordas e roldanas. Com o auxílio de diagramas de forças, vocês podem concluir rapidamente que a força aplicada será menor do que a força transmitida (pela máquina), de modo que definimos a vantagem mecânica do sistema como sendo a razão entre ambas:

$$V_m = \frac{F_{trans.}}{F_{apl.}}$$

Vamos  $V_m$  obter experimentalmente para um dado conjunto de massas e roldanas. A força aplicada poderemos medir com um dinamômetro.

## 6.2 Material e método

Painel de forças, transferidor, dinamômetros, fios e argolas, para o primeiro experimento (forças co-planares) e, para o segundo (máquina simples), roldanas, cordas, massas, tripé e dinamômetro.

## 6.3 Roteiro experimental: parte A

- Disponha três dinamômetros no painel de forças. Conecte-os, através dos fios e argolas disponibilizadas.
- Disponha dois dos dinamômetros segundo um ângulo qualquer (mantendo um terceiro sempre alinhado com um dos eixos do painel de forças), meçam as forças indicadas nos dinamômetros e os ângulos entre eles (tanto com relação aos eixos estabelecidos quanto com relação às próprias distensões provocadas).
- Repita este procedimento para pelo menos 5 ângulos diferentes. (Sugestão: utilize, pelo menos, os ângulos de 30, 60, 90 e 120 graus.)

## 6.4 Roteiro experimental: parte B

- Meçam as massas de cada roldana disponibilizada e, com o tripé fornecido, disponha-as com o auxílio das cordas, de acordo com o esquema proposto em sala de aula. Façam um desenho esquemático do sistema, identificando a posição das roldanas e suas massas equivalentes (isto é importante).
- Meçam a massa de um objeto qualquer que será dependurado no sistema de roldanas (caso ele seja dependurado por um gancho, meça a massa do sistema completo).
- Com um dinamômetro adequado, na outra extremidade do sistema, meçam a força que mantém o equilíbrio do sistema e anotem em uma tabela. Para cada massa dependurada, meçam pelo menos 5 (cinco) vezes a força no dinamômetro.
- Repitam o procedimento para pelo menos outras três massas diferentes.

## 6.5 Guia para apresentação dos resultados

- Parte A: Para cada disposição angular escolhida, apresente os diagramas de força encontrados (decompondo, segundo o ângulo, as componentes nos eixos  $x$  e  $y$ ).
- Calcule a força resultante em cada caso.
- Calcule a força resultante a partir da equação geral de composição vetorial:  $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$ , onde  $A$  e  $B$  aqui são os módulos de dois vetores quaisquer, e  $\theta$  o ângulo entre eles, e  $R$  o módulo da resultante. Compare este valor com os valores obtidos anteriormente. Compare este valor com o valor da força equilibrante do sistema.
- Parte B: Façam um diagrama de forças completo, apresentando em cada ponto do sistema as forças pertinentes aplicadas. Calcule o valor destas forças. Obtenham a vantagem mecânica do sistema, para cada conjunto de massas. Ela será a mesma para cada conjunto de massas? Discuta isto no relatório

## 7 Atrito estático

### 7.1 Introdução

Sabemos pelas nossas experiências diárias que se tentamos empurrar um objeto qualquer sobre uma superfície irregular, como a bancada do laboratório de Física, por exemplo, devemos aplicar uma força. Esta força não é qualquer uma. Para isto, basta que iniciemos nosso experimento aplicando uma força bem pequena para tentarmos mover, por exemplo, o retro-projetor que fica sobre a bancada. Não obteremos sucesso a menos que aumentemos esta força aplicada. Até que ponto? Até o ponto em que a força aplicada iguale-se à força de atrito estático. Quando isto acontecer, o objeto entra em movimento acelerado e, para que ele se mova com velocidade constante, devemos diminuir a força aplicada. A força que faz com que o objeto se mova a uma velocidade constante, neste caso, é chamada de força de atrito dinâmico (ou cinético, dependendo do livro adotado).

Neste experimento, lidaremos primordialmente com a determinação do *coeficiente de atrito cinético*,  $\mu_e$ , dado pela equação:

$$F_e = \mu_e N$$

onde  $F_e$  é a força de atrito estático,  $\mu_e$  é o coeficiente de atrito estático e  $N$  a força normal.

Em um plano inclinado, como mostrado na Figura 3, a situação que normalmente encontramos é a seguinte. Para uma dada inclinação do plano de um ângulo  $\phi$  qualquer, em geral, podemos ter ou não o movimento descendente do objeto, sujeito à força gravitacional. Isto fica claro na figura: haverá movimento descendente desde que a projeção da força peso sobre o eixo  $x$  (ver Figura 3) for maior do que a força de atrito estático atuando sobre este mesmo eixo. Como determinar, experimentalmente, o coeficiente de atrito estático? O que podemos fazer, e o que de fato faremos, é iniciar o experimento com um bloco de madeira sobre um plano de inclinação variável, fazer variar a inclinação do plano com relação à horizontal e determinar, então, o ângulo mínimo requerido pelo sistema para que o bloco/objeto se movimente. Neste ponto, teremos a situação limite entre a atuação do atrito estático e dinâmico. Dizemos que este ponto define o coeficiente de atrito estático.

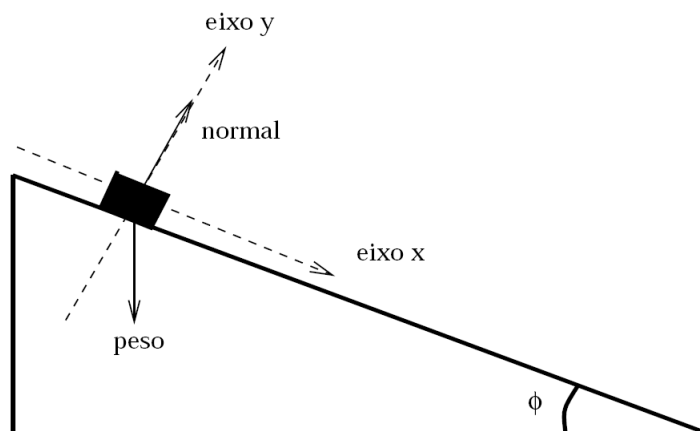


Figura 3: Objeto em um plano inclinado. As linhas tracejadas mostram os eixos coordenados  $x$  (paralelo ao eixo do plano inclinado) e  $y$  (paralelo à normal a este plano)

Neste experimento, vamos determinar o coeficiente de atrito estático para dois tipos diferentes de superfícies. Mas, além disso, vamos também realizar decomposição de forças usando, agora, além de dinamômetros (como no experimento anterior), também a força gravitacional, com o auxílio de um plano inclinado. Vamos deixar um carrinho em equilíbrio estático, em um plano inclinado, sob a ação de i) uma força de tensão (providenciada por um dinamômetro), ii) a força gravitacional e iii) a força de atrito (obviamente, teremos que determinar o coeficiente de atrito estático deste sistema).

## 7.2 Material e método

Plano inclinado, blocos de madeira com duas superfícies distintas, dinamômetros e carros deslizantes. Dados os objetos em questão, faremos variar a inclinação de uma superfície até o momento da iminência do movimento. Neste caso, mede-se o ângulo  $\phi$ , com as massas envolvidas, pode-se decompor corretamente as forças em questão em um diagrama de forças.

## 7.3 Roteiro experimental

- Montem o plano inclinado disponibilizado com um ângulo  $\phi = 0$  de inclinação (horizontal).

- Meçam a massa do bloco de madeira disponibilizado, coloque-o sobre a superfície do plano inclinado e inicie o processo de aumento gradual e contínuo do ângulo de inclinação.
- Meçam o ângulo segundo o qual o bloco inicia o seu movimento.
- Repitam esta operação pelo menos 5 (cinco) vezes.
- Repitam todo o procedimento anterior para a outra superfície do bloco.
- Parte B: Repitam o procedimento da Parte A acima, mas agora com o carro deslizante. Obtenham o coeficiente de atrito estático para este sistema (com um mínimo de cinco medidas).
- Fixem o dinamômetro na parte superior do plano inclinado.
- Façam a calibragem do dinamômetro.
- Meçam a massa do carro deslizante disponibilizado e, suavemente, acople-o à extremidade livre do dinamômetro. Meçam a força no dinamômetro (de novo, pelo menos cinco vezes).
- Meçam a massa do disco metálico disponibilizado, acrescente-o ao sistema e refaça a medida da força no dinamômetro (pelo menos cinco medidas...).
- Acrescente outra massa ao sistema e refaça o procedimento, com todas os discos que foram disponibilizados.

#### 7.4 Guia para apresentação dos resultados

- Discutam a questão teórica envolvida no atrito estático e dinâmico na introdução.
- Na primeira parte do experimento, montem as tabelas necessárias e apresentem os resultados dos coeficientes de atrito estático para os blocos de madeira.
- Na segunda parte, apresentem, primeiro, o coeficiente de atrito estático medido para o sistema carro-plano e, depois, apresente um desenho pormenorizado do arranjo completo (dinamômetro, carro, plano, discos metálicos, forças envolvidas, diagramas de força etc).

- Calculem cada força envolvida e comparem as soluções experimentais com o que deveria-se esperar teoricamente.

## 8 Associação de molas em série e em paralelo

### 8.1 Introdução

Vimos no Capítulo 4 que uma mola, quando deixada em repouso verticalmente, responde linearmente à atuação da força peso. Em particular, vimos que dependurando-se massas cada vez maiores na extremidade livre da mola, obtinhamos deformações sucessivamente maiores. Esta proporcionalidade é expressa pela chamada Lei de Hooke, a qual repetiremos aqui por completeza:

$$F = k\Delta x$$

onde  $F$  aqui é a força elástica,  $k$  a constante elástica da mola e  $\Delta x$  sua deformação com relação à posição de repouso (da mola).

O que faremos aqui neste experimento será obter os valores para a constante elástica de uma combinação em série de duas molas e, também, de uma combinação em paralelo de duas molas. Fica para o estudante a tarefa de mostrar que as equações para a constante elástica efetiva, para os casos em que temos duas molas (mola 1 e mola 2) em série e em paralelo serão dadas, respectivamente, por:

$$k_{serie} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (21)$$

$$k_{paralelo} = k_1 + k_2 \quad (22)$$

onde  $k_1$  é a constante elástica da mola 1 e  $k_2$  é a constante elástica da mola 2.

Nosso objetivo aqui, então, será mostrar a validade destas duas equações, experimentalmente.

### 8.2 Material e método

Tripé universal, suporte horizontal para as molas, duas molas de constantes elásticas indeterminadas,  $k_1$  e  $k_2$ , lâmina metálica, gancho metálico para suporte dos discos metálicos, discos metálicos. Balança, régua e fita métrica.

Discos	$m$ (g)	$\bar{m}$ (g)	$P$ (N)
1	20,2 20,1 20,3	$20,2 \pm 0,1$	$(202,0 \pm 1,0) \times 10^{-3}$
1+2	40,6 40,9 40,7	$40,7 \pm 0,1$	$(407,0 \pm 1,0) \times 10^{-3}$
1+2+3	60,4 60,5 60,6	$60,5 \pm 0,1$	$(605,0 \pm 1,0) \times 10^{-3}$
1+2+3+4	80,7 80,9 80,8	$80,8 \pm 0,1$	$(808,0 \pm 1,0) \times 10^{-3}$
1+2+3+4+5	101,0 100,8 100,9	$100,9 \pm 0,1$	$(1009,0 \pm 1,0) \times 10^{-3}$

Tabela 1: Massa medida, massa média e peso dos objetos

### 8.3 Roteiro experimental

- Montem o conjunto do tripé universal com o suporte horizontal para dependurar as molas;
- Com os cinco discos metálicos fornecidos, numere-os de 1 a 5. Meça suas massas na balança fornecida, na ordem e da forma (ou seja, agrupados) em que serão dependurados (ou seja, disco 1, disco 1 e 2, disco 1, 2 e 3 etc). Monte uma tabela com o formato sugerido (ver Tabela 1 acima). Chame esta tabela de TABELA 1 <sup>2</sup>.
- Escolha uma das molas. Chame-a de MOLA 1. Dependure a mola, com o gancho, e determine sua deformação no repouso ( $\Delta x_0$ ) Meça este valor três vezes e anote no relatório o valor da deformação de repouso (valor médio e desvio).

<sup>2</sup>Note que a Tabela APRESENTA O DESVIO EM CADA MEDIDA. Contudo, eles deverão ser calculados *a posteriori*, após o trabalho de laboratório, no feitiço do relatório. Obviamente, vocês deverão indicar se se trata do desvio padrão, da incerteza padrão etc, seja lá o que vocês definirem como desvio.

Discos	$\Delta x_i$ (cm)	$\Delta x_i$ (cm)	$\Delta x_i - \Delta x_0$ (m)
1	15,5 15,4 15,3	$15,4 \pm 0,1$	$(5,4 \pm 0,1) \times 10^{-2}$
1+2	20,5 20,4 20,3	$20,4 \pm 0,1$	$(10,4 \pm 0,1) \times 10^{-2}$
1+2+3	25,5 25,4 25,3	$25,4 \pm 0,1$	$(15,4 \pm 0,1) \times 10^{-2}$
1+2+3+4	30,5 30,4 30,3	$30,4 \pm 0,1$	$(20,4 \pm 0,1) \times 10^{-2}$
1+2+3+4+5	35,5 35,4 35,3	$35,4 \pm 0,1$	$(25,4 \pm 0,1) \times 10^{-2}$

Tabela 2: Deformações da Mola 1

- Dependure o disco 1 na mola e meça (três vezes) a deformação total da mola ( $\Delta x_1$ ). Adicione sucessivamente os outros discos (respeitando sua numeração) e repita este procedimento. Monte uma Tabela (chamem-na de TABELA 2), para a mola 1, contendo, na primeira coluna o objeto dependurado (Disco 1, no primeiro caso; Disco 1 e 2, no segundo caso, Disco 1, 2 e 3, no terceiro caso, etc), na segunda coluna o valor medido da variação provocada ( $\Delta x_i$ , onde  $\Delta x_i$  é a deformação correspondente aos sussecivos pesos:  $i = 1$ , Disco 1;  $i = 2$ , Disco 1 e 2;  $i = 3$ , Disco 1, 2 e 3, etc), na terceira coluna o valor médio desta deformação (já com os desvios, mas, calculados depois, no relatório) e, na quarta coluna, finalmente, o cálculo da variação líquida na deformação, isto é,  $\Delta x_i - \Delta x_0$  (já, obviamente, com seus valores médios, acrescidos da incerteza associada; este item deve ser feito depois, no relatório). Veja a Tabela 2 como exemplo.
- Repita os dois últimos itens para a MOLA 2 (e, obviamente, construa outra tabela; chamem-na de TABELA 3; estas duas tabelas, TABELA 2 e TABELA 3 servem para obter o valor da constante elástica da mola

1 e da mola 2, respectivamente).

- Uma vez feito isto, façam a montagem da associação em série das duas molas. Meçam a posição de equilíbrio do conjunto, com o gancho. Dependurem os cinco discos metálicos (um de cada vez, obviamente, e na seqüência correta), e meçam as deformações ocasionadas. Construam outra tabela com as informações (esta tabela, que será a TABELA 4 do Relatório, pode ser idêntica à Tabela 2 acima, desde que com a legenda apropriada, demonstrando claramente que trata-se do caso da associação em série).
- Façam a montagem da associação em paralelo com as duas molas. Dependurem os cinco discos metálicos (um de cada vez, obviamente), e meçam as deformações ocasionadas. Construam outra tabela com as informações (esta tabela, que será a TABELA 5 do Relatório, pode ser idêntica à Tabela 2 acima, desde que com a legenda apropriada, demonstrando claramente que trata-se do caso da associação em série).

#### 8.4 Guia para apresentação dos resultados

- Consultem TODO o material de apoio fornecido. Vocês precisam rever os conceitos de regressão linear.
- Consultem livros textos onde se discute associação em série e em paralelo de molas. Estudem a teoria e façam uma boa introdução ao tema. Deduzam as equações que serão utilizadas neste relatório, a saber, as equações das constantes elásticas efetivas para o caso em série e em paralelo.
- Apresentem os resultados em tabelas “limpas”, como as aqui sugeridas. Preparem a tabela de modo que sua última coluna seja um ponto do gráfico, como nas Tabelas 1 e 2 acima. Reparem que utilizando a última coluna da Tabela 1 e a última coluna da Tabela 2 vocês já podem construir, diretamente, o gráfico para a determinação da constante elástica da mola.
- Assim, com a TABELA 2 e TABELA 3 (nomes estes sugeridos ao longo deste Roteiro), vocês construirão dois gráficos do peso versus deformação, um para a mola 1 e outro para a mola 2. Aplicando

conceitos de regressão linear, vocês obterão as constantes elásticas  $k_1$  e  $k_2$ , com seus respectivos desvios.

- Com os valores médios obtidos no item anterior para  $k_1$  e  $k_2$ , calculem os valores das constantes elásticas efetivas dadas pelas equações (21) e (22) explicitadas na introdução deste Roteiro. Como se trata de uma medida indireta (estamos usando dois mensurandos para obter o valor de uma constante, não medida diretamente), temos que fazer o cálculo da propagação de erros. Apresente este cálculo (dedução) e, obviamente, o valor final das constantes com suas incertezas.
- Calculem, via método dos mínimos quadrados, o coeficiente angular das retas obtidas experimentalmente para o caso da associação em série e para o caso da associação em paralelo. Isto se faz utilizando-se os dados nas TABELAS 4 e 5 do Relatório (repito, a seqüência da numeração das tabelas foi sugerida ao longo deste Roteiro, e nada tem a ver com a seqüência da numeração das Tabelas que aparecem neste Roteiro, apenas a título de ilustração).
- Compare e DISCUTA os resultados obtidos via regressão linear e via cálculo através das equações.

## 9 Lançamento de projéteis

### 9.1 Introdução

Remonta a vários séculos os primeiros estudos sistemáticos dos lançamentos de projéteis. Excluindo-se o interesse bélico no problema, é possível extrair uma boa quantidade de informações com a observação (e mensuração) deste fenômeno. Nesta aula em particular investigaremos três fenômenos: i) a cinemática de corpos sujeitos a uma aceleração gravitacional  $g$ , ii) o caso particular do lançamento horizontal de um projétil a uma determinada velocidade  $v_{x,0}$  e, como sub-produto, iii) a conservação da energia.

Sabemos, por exemplo, que um corpo sob a atuação de um campo gravitacional deve ter seu comportamento cinemático ditado pelas seguintes equações:

$$x = x_0 + v_{x,0}t \quad (23)$$

$$y = y_0 + v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (24)$$

onde os termos, nestas equações, possuem seus significados usuais ( $x$  é a posição ao longo do eixo  $x$ ,  $x_0$  é a posição inicial neste eixo de coordenadas;  $y$  é a posição ao longo do eixo  $y$ ,  $y_0$  é a posição inicial neste eixo de coordenadas;  $v_{x,0}$  é a componente  $x$  da velocidade na posição  $x_0$ ,  $v_{y,0}$  é a componente  $y$  da velocidade na posição  $y_0$ ,  $t$  é a coordenada temporal e  $g$  a aceleração local da gravidade).

Assim, ao lançarmos um projétil horizontalmente, medindo-se o seu deslocamento em  $x$ , podemos avaliar, via equação (23), o valor da velocidade com o qual o mesmo foi lançado. Também, neste caso, estamos necessariamente, forçando  $v_{y,0} = 0$ . Determinando-se o tempo que o mesmo leva para chegar ao solo e, concomitantemente, a altura do qual ele se desprende da rampa, podemos obter, via equação (24), uma estimativa para o valor da aceleração da gravidade local,  $g$ . Em outras palavras, estudando (medindo-se) a cinemática do corpo em queda livre lançado por uma rampa horizontal, podemos estimar a velocidade horizontal do projétil, bem como ter uma idéia

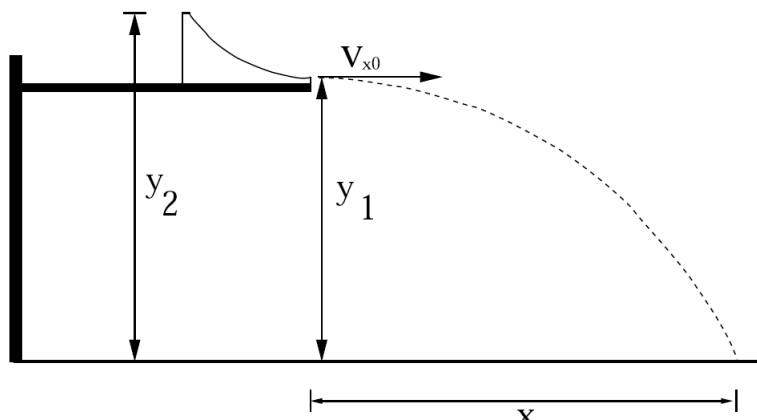


Figura 4: Figura que exemplifica a montagem experimental utilizada nesta aula. Note a relação das distâncias a serem medidas. Veja que  $y_2$  e  $y_1$  são as alturas máxima e mínima, respectivamente, da rampa utilizada. Como a origem do sistema de referência horizontal será a projeção da extremidade livre da rampa,  $x$ , na figura, já nos dará uma medida da trajetória da esfera (ver texto para uma discussão detalhada do aparato).

do valor da constante  $g$ . Estes serão dois dos nossos objetivos neste experimento.

Um terceiro objetivo será, após concluída a etapa anterior, comparar os resultados obtidos com as equações (23) e (24) com o resultado previsto pela conservação de energia. Como sabemos, um corpo que parta de uma determinada altura  $y_2$  com velocidade inicial igual a zero, deverá chegar ao final da rampa (aqui considerada horizontal, e com altura  $y_1$ ) com uma velocidade dada por (Ver Figura 4):

$$v_{x_0} = \sqrt{2gh} \quad (25)$$

onde  $h = y_2 - y_1$  (ver Figura 4) e  $g$  são, ambos, fornecidos pelo experimento. Contrastando a velocidade assim obtida com aquela fornecida pela equação (23), podemos chegar a interessantes conclusões. É fundamental o correto tratamento das incertezas neste experimento.

## 9.2 Material e método

Tripé e haste universais, cronômetro, fita métrica, papel milimetrado, rampa com saída horizontal, esfera metálica, fio de prumo e fita adesiva.

O experimento consistirá em abandonar, do repouso, uma esfera metálica do topo de uma rampa cuja saída é horizontal. Deveremos realizar medidas repetitivas do tempo que a esfera leva para atingir o solo, após sua saída definitiva da rampa, bem como as tomadas das medidas de altura (caracterização da rampa com relação ao solo) e deslocamentos horizontais sofridos pela esfera. Estas medidas subsidiarão os cálculos da aceleração da gravidade local, da velocidade horizontal inicial (onde inicial aqui quer dizer o ponto onde a esfera deixa a rampa). Ver Figura 4 para o reconhecimento inicial do problema de medição.

## 9.3 Roteiro experimental

- Alinhe a lateral da rampa horizontal fornecida em sala de aula com uma referência na bancada, como a linha divisória nas tampas de mármore das bancadas. Deixe a extremidade horizontal da rampa coincidir com a extremidade livre da bancada (isto lhe assegurará que a projeção vertical da extremidade livre da rampa coincidirá, no chão do laboratório, com a posição que chamaremos de  $x_0$ ; a qual faremos, por conveniência, ser nossa origem do sistema de coordenadas, ou seja,  $x_0 = 0$ ). Esta posição deverá se manter constante durante todo o processo de medida.
- Utilize o fio de prumo para determinar, no chão do laboratório, as projeções da extremidade livre da rampa. Pode-se utilizar uma fita adesiva para marcar, no chão, o início do sistema de coordenadas em  $x$ .
- Feito isto, faça alguns lançamentos com a esfera de metal, utilizando a altura máxima disponibilizada pela rampa. Estes testes iniciais irão nos fornecer uma idéia de onde a esfera tocará o solo, após lançada. Assim, pode-se proceder com a fixação do papel milimetrado no piso do laboratório (utilize as junções do porcelanato no piso para auxiliar na decisão de onde fixar o papel milimetrado).
- Montado o aparato experimental (rampa no lugar correto, caracte-

rização do sistema de coordenadas no piso do laboratório, fixação do papel milimetrado), podemos proceder com o experimento.

- Faça um lançamento da esfera, a partir do topo da rampa. Enquanto um membro do grupo lança a esfera, outro membro do grupo deverá ser responsável pela medição do tempo. O tempo a ser medido é o tempo entre a saída da esfera na rampa de lançamento e o toque da mesma no piso do laboratório. Deve-se, também, medir a distância entre a fita adesiva no solo (aquela que caracteriza nossa origem,  $x_0$ ) e o ponto que será produzido pelo impacto da esfera com o papel milimetrado. Como sugestão, após medida a distância, marque com uma caneta o ponto medido (para não confundir depois, com vários lançamentos e vários pontos no papel).
- Repita o item anterior pelo menos vinte (20) vezes. É muito importante, como dissemos, uma boa representação estatísticas dos resultados neste experimento.
- Uma vez medidos o tempo e o deslocamento horizontal, precisamos caracterizar a rampa. É preciso fazer medidas da altura da extremidade superior da rampa ( $y_2$ ; aquele na qual a esfera será abandonada inicialmente) e da extremidade inferior da rampa ( $y_1$ ; aquela na qual a esfera deixa a rampa; ver Figura 4). Para isto, utilize a fita métrica e obtenha, sem mexer no arranjo originalmente proposto, cinco (5) valores para a altura  $y_1$  (a saber, da extremidade da rampa ao solo) e, depois, altere a posição original da rampa, colocando-a de modo que se possa medir  $y_2$ .
- É fundamental, neste experimento, termos o controle sobre as incertezas. Para o limite de resolução da fita métrica, utilize 0,5 cm. Já para o limite de resolução do cronômetro, adote o seguinte procedimento: Com o cronômetro zerado, ligue e desligue-o com a máxima velocidade possível. Anote o resultado. Repita o procedimento pelo menos vinte (20) vezes. O valor médio desta grandeza, dividido por dois (2), será o limite de resolução temporal.

## 9.4 Guia para apresentação dos resultados

- Consultem TODO o material de apoio fornecido. Vocês precisam rever os conceitos de propagação de incertezas.
- Consultem livros textos onde se discute o problema da cinemática em duas dimensões de um corpo em queda livre. Estudem a teoria e façam uma boa introdução ao tema. Deduzam as equações que serão utilizadas neste relatório, a saber, as equações (23), (24) e (25).
- Na apresentação dos resultados, mostrem i) uma tabela do tempo ( $t$ ) versus deslocamento horizontal ( $x$ ); TABELA 1, ii) uma tabela para as medidas de  $y_1$ ; TABELA 2, e iii) outra tabela para as medidas de  $y_2$ ; TABELA 3.
- Apresentem os valores médios dos dados das três tabelas acima mencionados (pode ser, inclusive, na própria tabela).
- Com os valores médios de  $t$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  e  $x$ , obtenha as incertezas amostrais dos mensurandos. Ou seja, utilizem a equação:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \quad (26)$$

onde, aqui,  $N$  é o número de medidas,  $y_i$  é o valor do mensurando relativo à  $i$ -ésima medida e  $\bar{y}$  é o valor médio do mensurando. Estas incertezas deverão ser combinadas com o limite de resolução para gerar a incerteza padrão, que será utilizada no item abaixo. Apresentem, finalmente, o valor de cada mensurando com sua respectiva incerteza (padrão).

- Com o valor médio do tempo de queda livre da partícula, bem como o valor médio do deslocamento horizontal da mesma, calculem a velocidade  $v_{x_0}$ , a partir da equação (23). Apresente o resultado obtido com o respectivo desvio. Aqui, para o cálculo do desvio, é necessário utilizar a regra de propagação de incertezas, baseada em derivadas parciais quadráticas combinadas com as incertezas padrões determinadas no item anterior.

- Repita o item anterior, mas usando a equação (24) para determinar um valor para  $g$  (e seu respectivo desvio, assim como no item anterior).
- Utilizando o valor médio de  $g$ , obtido no item anterior, e o valor médio de  $y_2 - y_1$ , calcule, via equação (25), a velocidade (teórica) obtida por meio de métodos de conservação de energia.
- Discuta, nas conclusões, os valores obtidos. O valor encontrado para  $g$  é razoável? E as velocidades tangenciais, são compatíveis (considerando-se os erros)? Se não, porque elas são incompatíveis e, eventualmente, porque uma delas é maior do que a outra (estou me referindo à  $v_{x,0}$  calculado via experimento, ou seja, via cinemática, e via teoria, ou seja, via dinâmica da conservação de energia).

## 10 Determinação de velocidade instantânea

### 10.1 Introdução

Vimos no experimento anterior que, por conservação de energia, um projétil deixa uma rampa com uma determinada velocidade. Estimamos, utilizando a trajetória em queda livre deste projétil, a velocidade de lançamento do projétil. O que faremos aqui será determinar, em distintos pontos da trajetória de um corpo sobre um plano inclinado, as velocidades instantâneas de deslocamento do corpo. Para isto, devemos estimar o tamanho do objeto e o tempo que ele leva para atravessar um determinado ponto em sua trajetória. Como os tempos envolvidos são, em geral, muito curtos, utilizaremos uma placa de aquisição de tempo automatizada. Isto facilitará nossa abordagem ao problema. Contudo, temos complicadores. De fato, a utilização do teorema de conservação de energia para este caso, que envolve o atrito, não é adequada. Contudo, vamos utilizá-la assim mesmo, uma vez que não dispomos, no momento, de um trilho de ar para a realização deste experimento.

Também, como forma de verificar o experimento do Capítulo anterior, vamos medir efetivamente a velocidade instantânea da partícula ao deixar a rampa que utilizamos, com o auxílio dos medidores de tempo baseado na interrupção de um feixe de laser. Esta medida deverá ser contrastada com os valores obtidos no relatório anterior.

### 10.2 Material e método

Plano inclinado, placa de aquisição, micro-computador, temporizadores eletrônicos, esfera sólida, paquímetro, rampa de lançamento de projétil e balança.

O experimento consistirá em duas partes.

- Na primeira parte, vamos lançar uma esfera sólida do topo de uma rampa e fazer aquisições sistemáticas do tempo que a esfera leva para passar na extremidade livre da rampa. Medindo-se também o diâmetro da esfera, podemos determinar a velocidade instantânea do projétil. Este resultado deverá ser contrastado com o valor obtido experimentalmente no Capítulo anterior (via cinemática do corpo em queda livre).

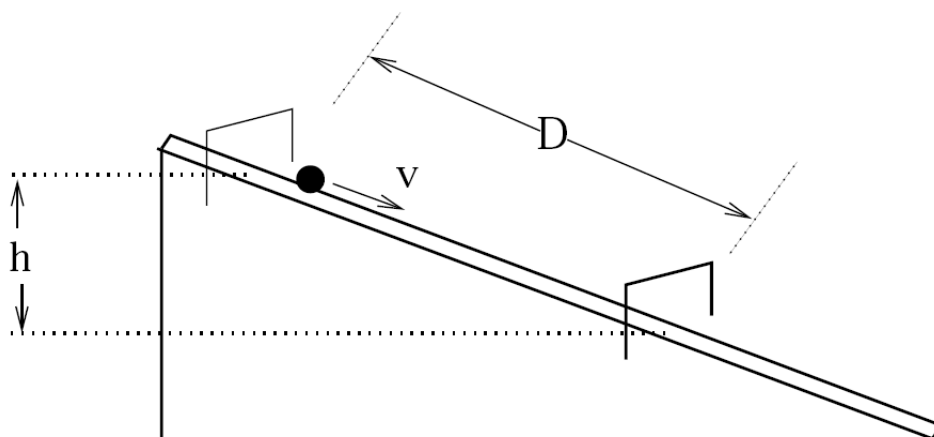


Figura 5: Disposição dos temporizadores no plano inclinado para a obtenção das velocidades instantâneas de deslocamento da esfera. Note que as grandezas  $h$  e  $D$  devem ser obtidas. Deve-se, também, medir o ângulo  $\theta$  de inclinação da rampa.

Na segunda parte do experimento, utilizaremos um plano inclinado (devemos medir a inclinação do plano e a distância que separa os dois temporizadores, de modo a determinar  $h = y_2 - y_1$ ; ver Figura 5). Deixaremos um corpo esférico rolar livremente neste plano e determinaremos os tempos de passagem em pontos fixos da trajetória (onde fixaremos os temporizadores). Com o diâmetro da esfera e os tempos medidos, podemos calcular precisamente as velocidades instantâneas, no topo ( $y_2$ ) e na base ( $y_1$ ) da trajetória. Medindo-se a distância vertical ( $\Delta h = y_2 - y_1$ ) entre estes dois pontos fixos, podemos utilizar o teorema da conservação de energia para comparar os resultados. A Figura 5 mostra a montagem do experimento, com as grandezas a serem avaliadas. Neste experimento, a massa da esfera deverá ser medida.

### 10.3 Guia para apresentação dos resultados

- Apresentem um relatório sucinto mostrando os principais resultados do experimento.

## 11 Referências

- Chaves, A.S. *Física Volume 1 - Mecânica*, Ed. Reichmann e Autores, Primeira Edição (2001)
- da Silva, M.F. e colaboradores, *Mecânica Física I Experimental*, (Roteiro das Experiências do Instituto de Física da UERJ, 1999)
- Halliday, D., Resnick, R., Krane, K.S. *Física, Volume 1*, Ed. Livros Técnicos e Científicos, Quinta Edição (2003)
- INMETRO, *Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia*, 3 Edição, Rio de Janeiro, 2003
- Vários Autores, *Apostila de Laboratório de Física I - UFMG* (2005)
- Vasconcelos, F.H. *Sistemas de Medição*, Apostila do Curso de Sistemas de Medição do Departamento de Engenharia Elétrica, UFMG (2006)
- Vuolo, J.H. *Fundamentos da Teoria de Erros*, Ed. Edgard Blücher LTDA., São Paulo, Segunda Edição (1996)

## A Derivadas parciais e propagação de incertezas

Imagine uma função ( $f$ ) que seja determinada por duas variáveis independentes ( $x$  e  $y$ , por exemplo). Dizemos então, que temos uma função de duas variáveis,  $f(x, y)$ . Podemos ter uma função de várias variáveis<sup>3</sup>. Podemos utilizar o conceito de derivada de uma função a uma única variável,  $f(x)$ :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (27)$$

para estender à funções de mais variáveis. Em nosso exemplo, seja  $f(x, y)$  uma função contínua e definida. Por analogia à equação (27), teremos:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (28)$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (29)$$

Note que o símbolo  $\partial$ , aqui, denota *derivada parcial*, ou seja, indica que a derivada está sendo calculada sobre uma, e apenas uma, das duas variáveis que depende a função  $f$ . Este mesmo raciocínio pode ser aplicado a uma função qualquer de  $n$  variáveis.

A “receita” acima nos diz que, dada uma função qualquer de duas variáveis, o cálculo da *derivada parcial* é bastante simples. Por exemplo, seja a função:

$$f(x, y) = 5xy^2$$

logo:

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(5xy^2) = 5x \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 10xy$$

---

<sup>3</sup>Por exemplo, a velocidade de um carro de passeio, que depende das coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e também do tempo  $t$ ; mas, para nosso exemplo aqui, basta considerarmos uma função de duas variáveis.

ou seja, basta considerar todas as outras variáveis constantes e derivar segundo a variável pertinente (no caso acima,  $y$ ).

Em uma função de uma única variável,  $f(x + \Delta x)$  pode ser aproximado por:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \frac{df}{dx} \cdot \Delta x$$

Isto pode ser facilmente verificado se lembrarmos que  $df/dx$  é a tangente de um ângulo  $\alpha$ , que representa a inclinação da função no ponto  $x$ : logo,  $\tan\alpha \cdot \Delta x \equiv \Delta f$ . É fácil vermos que a equação acima pode ser escrita como:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \simeq \frac{df}{dx} \cdot \Delta x$$

(pois, no limite, esta é a própria definição da derivada!). Assim, reescrevamos esta equação:

$$\Delta f \equiv f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{df}{dx} \cdot \Delta x$$

Agora, vamos imaginar que a função possa ter duas variáveis, por exemplo. Neste caso, temos dois  $\Delta$ 's associados, um a  $x$  e outro a  $y$ <sup>4</sup>:

$$\Delta f_x \equiv f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x$$

$$\Delta f_y \equiv f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Note que, aqui, utilizamos o conceito de derivada parcial, definido anteriormente.

É também intuitivo ver, a partir das equações acima, que a variação total será dada pela soma dos quadrados das variações parciais (a hipotenusa de um triângulo):

$$(\Delta f)^2 = (\Delta f_x)^2 + (\Delta f_y)^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y \right)^2$$

logo, tomando o limite quando  $\Delta x$  e  $\Delta y$  tenderem a zero, e fazendo  $\Delta = \sigma$  obtemos, finalmente, a seguinte equação:

---

<sup>4</sup>Geometricamente, eles representam a variação ao longo de  $x$  e de  $y$  da função, que neste caso é uma superfície no espaço 3-D.

$$\sigma^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 \quad (30)$$

Quando estivermos lidando com grandezas derivadas, esta é a equação geral que devemos utilizar no cálculo da incerteza. No Roteiro 3 trabalharemos diretamente com estes conceitos.

## B O método dos mínimos quadrados

No que se segue, apresentamos a obtenção dos coeficientes lineares e angulares de uma reta, através do método dos mínimos quadrados. Esta descrição foi baseada nos trabalhos apresentados em da Silva et al. (1999) e Vuolo (1996), cujas leituras recomendo fortemente.

Como não sabemos qual a melhor função para representar os dados, vamos considerar a seguinte função genérica:

$$f(x) = \beta_0 g_0(x) + \beta_1 g_1(x) + \dots + \beta_m g_m(x) \quad (31)$$

onde  $\beta_i$  são os coeficientes (a serem determinados) e  $g_i(x)$  funções contínuas no intervalo considerado. O que queremos é aproximar esta função  $f(x)$  aos valores determinados experimentalmente, ajustando as funções  $g$  e os coeficientes  $\beta$  acima.

Na Figura 1, por exemplo, o que temos é uma série de medidas,  $x_i$ , gerando uma série de pontos  $y_i$ <sup>5</sup>. Temos que determinar, portanto, uma função que melhor represente estes dados experimentais. Uma forma de fazê-lo é utilizando o conceito (já conhecido) de desvio:  $d_i = y_i - f(x_i)$ . Nesta equação,  $d_i$  é o desvio,  $y_i$  o ponto experimental e  $f(x_i)$  a função de  $x_i$  dada pela equação (31). Uma boa maneira de obter a função que melhor ajusta aos dados é fazer com que o desvio seja mínimo para todos os pontos  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Logo, definindo:

$$\begin{aligned} D(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m) &= \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n [y_i - \beta_0 g_0(x) - \beta_1 g_1(x) - \dots - \beta_m g_m(x)]^2 \end{aligned} \quad (32)$$

A técnica dos mínimos quadrados consiste em derivar parcialmente a função  $D(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$  acima em relação aos coeficientes  $\beta_i$  e igualar estas

---

<sup>5</sup>Note que estamos simplificando nosso linguajar:  $x_i$  para nós agora são as deformações líquidas a que nos referimos anteriormente,  $\Delta x$ ; e  $y_i$  é, agora, a força elástica exercida pela mola; veja o Roteiro numero 3.

derivadas a zero (encontrando os pontos de mínimos). Fica como exercício para o aluno esta derivação ( $\partial D/\partial\beta_0$ ,  $\partial D/\partial\beta_1$ , etc). Derivando e igualando a zero, encontra-se um sistema linear de equações, determinando-se assim os coeficientes  $\beta$ 's. Embora este procedimento seja geral e se possa fazê-lo para um número  $n$  qualquer, vamos aqui calcular o caso de  $n = 2$ . Vamos assumir:

$$g_0 = 1 \qquad g_1 = x$$

logo:

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x \qquad (33)$$

que é a equação de uma reta. Encontrando  $\beta_0$  e  $\beta_1$  estamos encontrando o coeficiente linear e o coeficiente angular, respectivamente. Como dissemos, usando a equação (32), teremos:

$$D(\beta_0, \beta_1) = \sum [y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i]^2 \qquad (34)$$

onde suprimimos os índices do somatório para simplificar a notação. Derivando com relação a  $\beta_0$  e  $\beta_1$ , como manda a receita:

$$\frac{\partial D}{\partial \beta_0} = (2) \left( \sum [y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i] \right) (-1) \qquad (35)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \beta_1} = (2) \left( \sum [(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)(-x_i)] \right) \qquad (36)$$

Fazendo as derivadas serem iguais a zero (pontos de mínimo) e rearranjando os termos ligeiramente, obtemos:

$$(n)\beta_0 + \left( \sum x_i \right) \beta_1 = \sum y_i$$

$$\left( \sum x_i \right) \beta_0 + \left( \sum x_i^2 \right) \beta_1 = \sum x_i y_i$$

estas duas equações podem ser escritas de forma mais elegante, como um produto de matrizes:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix} \qquad (37)$$

É fácil agora provar (resolvendo o sistema linear de equações acima através dos determinantes; vocês podem fazê-lo!) que os coeficientes  $\beta_0$  e  $\beta_1$  são dados, respectivamente, por:

$$\beta_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (38)$$

$$\beta_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (39)$$

as quais são, respectivamente, dadas pelas equações (19) e (20), já discutidas no texto, mas sem provas. A dedução aqui é completamente geral e você pode estender esta análise para casos de polinômios de maior grau.

Os desvios associados a estas constantes serão dados por:

$$\Delta\beta_0 = \frac{D}{(N-2)} \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (40)$$

$$\Delta\beta_1 = \frac{D}{(N-2)} \frac{1}{\sqrt{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (41)$$

onde, nesta equação,  $D$  é a soma quadrática dos resíduos, dada pela equação (34).