Universidade Estadual de Santa Cruz

PROFÍSICA – Programa de Pós-graduação em Física

Seleção 2009.1 – Prova Escrita – 12/01/2009

Candidato (nome legível):____

- Esta prova consta de oito questões distribuídas da seguinte forma:
    - Seção A: duas questões de Mecânica Clássica
    - Seção B: duas questões de Termodinâmica
    - Seção C: duas questões de Eletromagnetismo Clássico
    - Seção D: duas questões de Física Quântica

- O candidato deverá responder apenas quatro questões, sendo obrigatoriamente UMA DE CADA SEÇÃO.
- Todas as questões têm o mesmo peso.
- Não será permitido o uso de nenhum equipamento eletrônico, exceto calculadora se necessário (desligue *pagers* e celulares).
- Leia atentamente os enunciados e articule as suas respostas. Estas deverão ser escritas de forma clara e obrigatoriamente a TINTA.
- Não se esqueça de colocar o seu nome em TODAS as folhas.
- Não será permitido em hipótese alguma se ausentar da sala nos primeiros 40 min. Candidatos que se apresentarem após os 40 min iniciais não poderão fazer a prova.
- Não serão respondidas perguntas conceituais durante a prova.
- Duração da prova: 240 min.
- O resultado final do processo seletivo será divulgado dia 28/07 no site oficial do PROFÍSICA: http://www.uesc.br/cursos/pos_graduacao/mestrado/profisica/
- Respeite a concentração dos colegas e permaneça em silêncio absoluto!

Boa Prova!

SEÇÃO A: MECÂNICA CLÁSSICA

1 Primeira Questão

Uma esfera homogênea de centro G, de massa M e de raio a rola, sem deslizar, num plano xOy inclinado de um ângulo α com a horizontal (ver figura 1). No instante $t = 0$, o centro da esfera está na origem O com uma velocidade inicial $\vec{V_0} = v_0 \vec{e_y}$. A esfera está sendo lançada sem movimento de rotação a redor do eixo Gz.

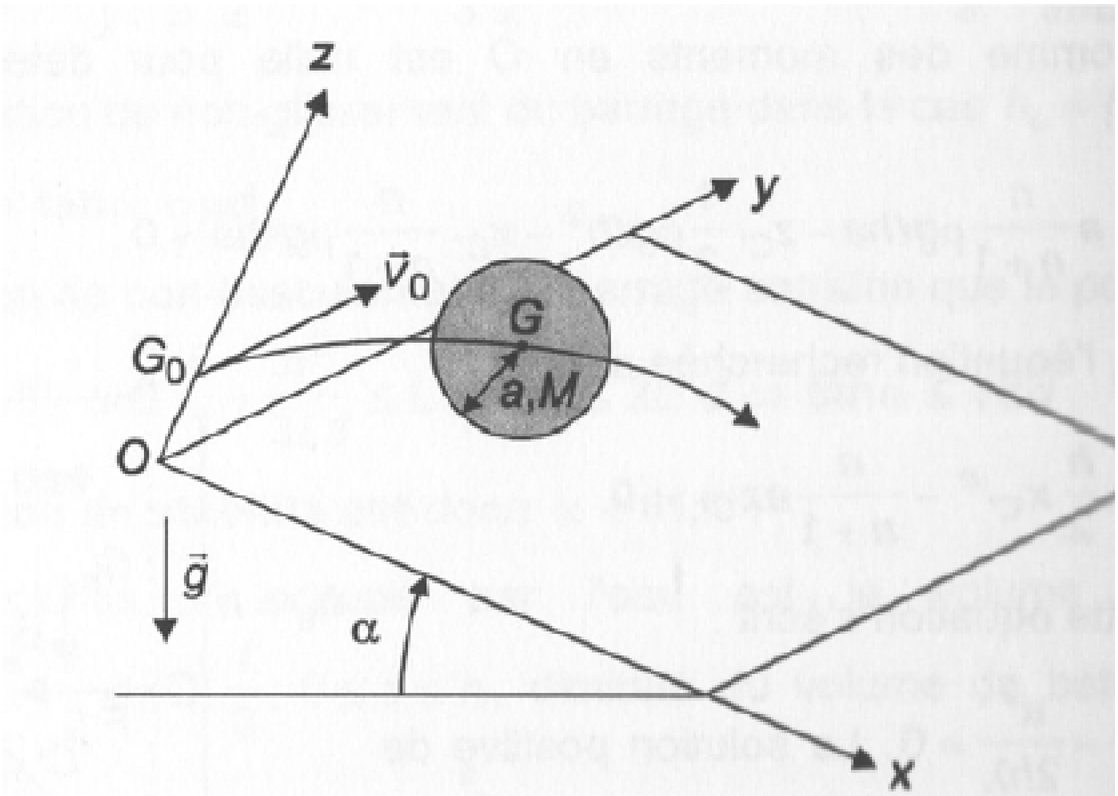

Figure 1: Figura 1

- Usando a condição do rolamento sem deslizamento, calcular as componentes do vetor $\dot{\vec{\omega}}$ (derivada do vetor velocidade angular) em função das componentes da velocidade do centro de massa.
- Usando a segunda lei de Newton e o teorema do momento angular (no referencial do centro de massa), aplicado ao centro G, deduzir a equação da trajetória da esfera sobre o plano inclinado.

Dado: momento de inércia de uma esfera em relação ao centro: $J = \frac{2}{5} M a^2$

2 Segunda Questão

Uma particula de massa m está se movendo dentro de um potencial central $V(r)$. A Lagrangiana, em coordenadas esféricas se escreve:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2) - V(r)$$

- Calcular os momentos conjugados p_r, p_θ e p_ϕ
- Calcular o Hamiltoniano $H(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi)$
- Escrever as equações do movimento de Hamilton.

SEÇÃO B: TERMODINÂMICA E MECÂNICA ESTATÍSTICA

1 Primeira Questão

Dois corpos idênticos, com capacidade calorífica à presão constante c_p, independente da temperatura, são utilizados como fontes de calor para uma máquina térmica. Os corpos são mantidos à presão constante, e inicialmente suas temperaturas são $T_1 > T_2$. Finalmente, como resultado do funcionamento da máquina térmica, os corpos alcançam uma temperatura final T_f.

(a) Calcule a quantidade total de trabalho W realizado pela máquina em função de c_p, T_2 e T_f.

(b) Deduza qual é a temperatura T_f mínima que podem alcançar ambos corpos. Justifique.

(c) Para temperaturas iniciais T_1 e T_2, qual é o máximo trabalho que pode dar a máquina, trabalhando entre esses dois corpos?

2 Segunda Questão

Consideramos um sistema de N partículas independentes num volume V mantido numa temperatura T. Cada partícula possui 3 estados, não degenerados, de energia: $-\epsilon$, 0, $+\epsilon$ (com $\epsilon > 0$).

- Calcular a função de partição do sistema e a sua energia média.
- Dar a probabilidade de cada um dos e níveis de energia. Deduzir o número de partículas N_1, N_2 e N_3 em cada nivel de energia em funçao de de T, ϵ e N.
- Dar os limites de N_1, N_2 e N_3 a baixa e alta temperaturas. Comentar.

Formulário: $\bar{E} = -\frac{\partial LnZ}{\partial \beta}$

SEÇÃO C: ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO

1 Primeira Questão

(a) Suponha uma partícula de carga q, com velocidade $\vec{v}$ em uma região do espaço com campo elétrico $\vec{E}$ e indução magnética $\vec{B}$. Mostre que o produto interno do vetor campo elétrico e o vetor densidade de corrente expressa a taxa com que trabalho mecânico (por unidade de volume) é realizado.

(b) Partindo das equações de Maxwell, mostre que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{J} \cdot \vec{E}$$

onde $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ e $u = (1/2)(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$. Interprete este resultado (por exemplo, o que significa o vetor $\vec{S}$?) e mostre que, de fato, esta é uma equação de conservação de energia para o campo eletromagnético.

2 Segunda Questão

(a) Considere uma carga puntual q localizada justamente sobre um plano que separa o espaço em duas regiões distintas: um material dielétrico caracterizado pela constante K e o vácuo. Use a Lei de Gauss para calcular o campo E a uma distância r da carga q (ou seja, considere uma esfera de raio r centrada na carga; note que um dos hemisférios estará no dielétrico e o outro, consequentemente, fora dele, isto é, no vácuo). Se fosse escrever o campo como se fosse devido a uma carga efetiva, qual seria esta carga (descreva o resultado em função de K)?

(b) Como as linhas de força são modificadas pela presença de uma esfera dielétrica (suponha, de raio a, descarregada, e caracterizada por uma constante dielétrica K)? Calcule o campo dentro e fora do dielétrico considerando um campo externo originalmente uniforme $\vec{E}_0$. Esboçe as linhas de campo dentro e fora da esfera.

DADOS ÚTEIS PARA OS PROBLEMAS ACIMA:

- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} - \vec{F} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{G}$

- Harmônicos zonais: $\varphi_n = r^n P_n(\theta)$, $\varphi_n = r^{-(n+1)} P_n(\theta)$, onde $P_0(\theta) = 1$, $P_1(\theta) = \cos\theta$, $P_2(\theta) = (1/2)(3\cos^2\theta - 1)$, etc.

SEÇÃO D: FÍSICA QUÂNTICA

1 Primeira Questão

A função de onda no espaço dos momentos de uma partícula que se move em uma dimensão é dada por

$$\Phi(p) = A \exp\left(-\lambda p^2\right)$$

com A sendo uma constante de normalização e λ um parâmetro positivo. Ache uma expressão da incerteza na posição (Δx) em função do parâmetro λ. Interprete o resultado obtido.

2 Segunda Questão

Na base ortonormal $\{|1>, |2>\}$ o operador $\widehat{K}$ possui a seguinte representação matricial:

$$\widehat{K} = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

a) É $\widehat{K}$ um operador hermitiano? (Não responda somente SIM ou NÃO. Justifique adequadamente a sua resposta)

b) Determine o seus autovalores (λ_1 e λ_2) e os autovectores (devidamente normalizados) $|u_1>$ e $|u_2>$. Desenvolva os autovectores em termos da base ortornormal $\{|1>, |2>\}$

c) Determine a matriz de mudança de base. Verifique que ela é uma matriz unitária.

FORMULÁRIO:

$$\Delta x = \sqrt{\overline{(x - \overline{x})^2}}$$

$$I_n(\alpha) = \int_0^\infty \xi^n \exp\left(-\alpha \xi^2\right) d\xi, \qquad \alpha > 0$$

$$I_0(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I_1(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}$$

$$I_2(\alpha) = \frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$