Universidade Estadual de Santa Cruz

PROFÍSICA – Programa de Pós-graduação em Física

Seleção 2009.2 – Prova Escrita – 23/07/2009

Candidato (nome legível):____

- Esta prova consta de oito questões distribuídas da seguinte forma:

  - Seção A: duas questões de Mecânica Clássica
  - Seção B: duas questões de Termodinâmica
  - Seção C: duas questões de Eletromagnetismo Clássico
  - Seção D: duas questões de Física Quântica

- O candidato deverá responder apenas quatro questões, sendo obrigatoriamente UMA DE CADA SEÇÃO.

- Todas as questões têm o mesmo peso.

- Não será permitido o uso de nenhum equipamento eletrônico, exceto calculadora se necessário (desligue *pagers* e celulares).

- Leia atentamente os enunciados e articule as suas respostas. Estas deverão ser escritas de forma clara e obrigatoriamente a TINTA.

- Não se esqueça de colocar o seu nome em TODAS as folhas.

- Não será permitido em hipótese alguma se ausentar da sala nos primeiros 40 min. Candidatos que se apresentarem após os 40 min iniciais não poderão fazer a prova.

- Não serão respondidas perguntas conceituais durante a prova.

- Duração da prova: 240 min.

- O resultado final do processo seletivo será divulgado dia 28/07 no site oficial do PROFÍSICA:

http://www.uesc.br/cursos/pos_graduacao/mestrado/profisica/

- Respeite a concentração dos colegas e permaneça em silêncio absoluto!

Boa Prova!

SEÇÃO A: MECÂNICA CLÁSSICA

Questão 1

Mostre que energia cinética de um sistema de N partículas de massas m_i $(i = 1, 2, ...N)$ em relação a um sitema de referência inercial pode ser escrita como

$$T = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i'^2,$$

onde $\vec{v}_{CM}$ é o vetor velocidade do centro de massa em relação ao dito sistema de referência inercial, $\vec{v}_i'$ é o vetor posição da i-ésima partícula em relação ao sistema de referência do centro de massa e

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

Questão 2

Uma partícula de massa m se move no plano xy sob a ação de uma enregia potencial dada por

$$U(r) = \frac{1}{2}Kr^2,$$

onde K é uma constante e r é a coordenada radial da partícula. Escrever a função de Hamilton, $H(p_r, p_\theta, r, \theta)$ e as equações de Hamilton.

Formulário:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

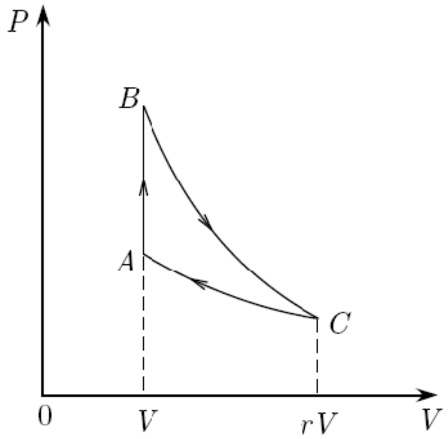
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

SEÇÃO B: TERMODINÂMICA

Questão 1

Considere o ciclo mostrado na figura abaixo para um gás ideal para o qual o coeficiente adiabático vale $\gamma = C_P/C_V$. A temperatura inicial, em A, é T_A e em B, é T_B. O processo que leva o sistema do estado B ao estado C é executado com o sistema isolado e aquele que leva o sistema de volta a A, em contato com um reservatório de calor.



(a) Represente estes processos em um diagrama U-T e em um diagrama T-S;

(b) Expresse r em termos das temperaturas T_A e T_B;

(c) Calcule o trabalho, a variação da energia interna, o fluxo de calor e a variação da entropia em cada processo e em todo o ciclo em termos de T_A, T_B, r, γ e n, o número de moles do gás, explicitando se a grandeza é positiva ou negativa;

(d) Calcule o rendimento do ciclo.

Questão 2

(a) Considere um gás cuja equação de estado é do tipo f(P,v,T)=0. Calcule os potenciais termodinâmicos, suas diferenciais e as relações de Maxwell para este sistema.

(b) Considere agora que a função de Helmholtz do sistema tem a seguinte forma:
$f = c_v(T - T_0) - c_v T ln\frac{T}{T_0} - RT ln\frac{v}{v_0} - s_0(T - T_0) + f_0$.
Calcule (i) a equação de estado do sistema; (ii) a entropia; (iii) a energia interna e (iv) a função de Gibbs.

SEÇÃO C: ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO

Questão 1

Um campo elétrico uniforme $\vec{E}_0$ está presente em um meio de constante dielétrica K. Encontre o campo elétrico no interior de uma cavidade esférica (de raio a, imersa no dielétrico).

Questão 2

(a) Considere uma esfera condutora de raio a e carga q. Obtenha o potencial na superfície da mesma (com relação ao infinito). (Os itens a seguir estão apenas indiretamente relacionados ao item anterior) (b) Considere duas esferas condutoras, 1 e 2, de raio r_1 e r_2, com $r_1 = fr_2$ ($f > 1$). Suponha que uma delas esteja inicialmente carregada, com carga q. Conecte as esferas por um fio condutor, longo e fino. Encontre os potenciais após a conexão (a resposta deve estar em função de q, f e o raio das esferas). (c) Obtenha uma relação entre as densidades superficiais de carga ao final do processo. (d) Se $f > 1$, como sugerido, o que você pode dizer sobre os campos elétricos nas proximidades de ambas as esferas?

Dados: Harmônicos zonais: $r^n P_n(\theta)$, $r^{-(n+1)} P_n(\theta)$, com $P_0 = 1$, $P_1 = \cos\theta$, $P_2 = (1/2)(\cos^2\theta - 1)$, etc. Gradiente de uma função f em coordenadas esféricas: $\vec{\nabla} f = \hat{r}(\partial f/\partial r) + \hat{\theta}(1/r)(\partial f/\partial\theta) + \hat{\phi}(1/r\mathrm{sen}\theta)(\partial f/\partial\phi)$

SEÇÃO D: FÍSICA QUÂNTICA

Questão 1

O conjunto de funções de onda ortonormais para os estados estacionários do oscilador harmônico, com $V(x) = (1/2)\, m\omega^2 x^2$ é

$$\left\{\psi_n(\eta) = N_n H_n(\eta)\, e^{-\eta^2/2}\right\}, \qquad \text{com} \quad \eta = \sqrt{\frac{2\pi m\omega}{h}}x.$$

Os polinômios de Hermite, $H_n(\eta)$ satisfazem as relações de recurrença

$$\begin{aligned} \eta H_n(\eta) &= nH_{n-1}(\eta) + \frac{1}{2}H_{n+1}(\eta) \\ \frac{dH_n(\eta)}{d\eta} &= 2nH_{n-1}(\eta) \end{aligned}$$

As constantes de normalização N_n são

$$\begin{aligned} N_0 &= \pi^{1/4} \\ N_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}N_n \end{aligned}$$

(a) Mostre que os elementos de matriz de x podem ser expressados como

$$\langle\psi_n|\, x\, |\psi_m\rangle = \sqrt{\frac{nh}{4\pi m\omega}}\delta_{m,n-1} + \sqrt{\frac{(n+1)\,h}{4\pi m\omega}}\delta_{m,n+1}$$

(b) Obtenha uma expressão semelhante para os elementos de matriz de x^2.

(c) Os operadores a e $a^\dagger$ do oscilador harmônico têm as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} a^\dagger\, |\psi_n\rangle &= \sqrt{n+1}\, |\psi_{n+1}\rangle \\ a\, |\psi_n\rangle &= \sqrt{n}\, |\psi_{n-D1}\rangle \end{aligned}$$

Derivar as expressões para a e $a^\dagger$ em termos de η e $d/d\eta$. Ajuda: começar investigando a ação do operador $d/d\eta$ sobre ψ_n.

Questão 2

Em um âtomo, um elétron de valência experimenta uma força de Coulomb de longo alcance, e o poço de potencial que representa a interação suporta um espectro infinito de estados ligados. Em contraste, a interação entre os elétrons mais externos em um íon negativo, e o caroço atômico neutro, que é fraca e de curto alcance, resulta em só um número finito de estados ligados. Para os estados s ($l = 0$), o íon negativo pode ser aproximado por um modelo no qual a interação entre o elétron mais externo, de massa m e o caroço é representada por um potencial central atrativo, unidimensional, da forma

$$\begin{aligned} V(r) &= -V_0 \qquad 0 \leq r \leq a \\ V(r) &= 0 \qquad r > a \end{aligned}$$

(a) Resolver a equação de Schrödinger independente do tempo, e achar a expressão (em forma de equação trascendente), que relaciona os autovalores deste sistema às quantidades V_0, a e m. Resolver esta equação gráficamente.

(b) Mostrar, gráficamente ou de outra forma, que os estados ligados só existem se

$$R = \sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}} \geq \frac{\pi}{2}$$

(c) Determinar quantos estados ligados existem, se $R = p$.

(d) A condição para a existência de estados ligados, depende do produto da profundidade e do quadrado da largura do poço de potencial. Explique claramente esta dependência, em termos do princípio de incerteza.