EURIVALDA RIBEIRO DOS SANTOS SANTANA

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO:

o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante?

Editora da UESC

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO:

o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante?

Universidade Estadual de Santa Cruz

GOVERNO DO ESTADO DA BAHIA
Jaques Wagner - Governador

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO
Osvaldo Barreto Filho - Secretário

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
Adélia Maria Carvalho de Melo Pinheiro - Reitora
Evandro Sena Freire - Vice-Reitor

DIRETORA DA EDITUS
Maria Luiza Nora

Conselho Editorial:
Maria Luiza Nora – Presidente
Adélia Maria Carvalho de Melo Pinheiro
Antônio Roberto da Paixão Ribeiro
Dorival de Freitas
Fernando Rios do Nascimento
Jaênes Miranda Alves
Jorge Octavio Alves Moreno
Lino Arnulfo Vieira Cintra
Lourival Pereira Júnior
Maria Laura Oliveira Gomes
Marcelo Schramm Mielke
Marileide Santos Oliveira
Raimunda Alves Moreira de Assis
Ricardo Matos Santana

EURIVALDA RIBEIRO DOS SANTOS SANTANA

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO:

o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante?

Ilhéus - Bahia

Editora da UESC

2012

©2012 by Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana

Direitos desta edição reservados à
EDITUS - EDITORA DA UESC
Universidade Estadual de Santa Cruz
Rodovia Ilhéus/Itabuna, km 16 - 45662-900 Ilhéus, Bahia, Brasil
Tel.: (73) 3680-5028 - Fax: (73) 3689-1126
http://www.uesc.br/editora e-mail: editus@uesc.br

PROJETO GRÁFICO E FOTOGRAFIA DA CAPA
Alencar Júnior

REVISÃO
Maria Luiza Nora
Aline Nascimento

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S232 Santana, Eurivalda Ribeiro dos Santos.
Adição e subtração : o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante? / Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana. – Ilhéus, BA : Editus, 2012.
235 p. : Il.

Inclui bibliografia e apêndice.

ISBN: 978-85-7455-270-5

1. Matemática (Ensino Fundamental) – Estudo e ensino. 2. Adição. 3. Subtração. I. Título.

CDD 372.7

PREFÁCIO

Neste livro, *Adição e subtração: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante?*, a Profa. Dra. Eurivalda Santana traz para a sociedade, por um meio de divulgação de maior alcance, os resultados de sua tese de doutoramento, orientado pela Profa. Dra. Sandra Magina. A pesquisa de tese que deu origem a este livro é minha velha e íntima conhecida por dois motivos: primeiro, por ela ter nascido de leituras e reflexões que Eurivalda fez do nosso livro – Repensando adição e subtração – inspirado na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud; segundo, por ter acompanhado a sua pesquisa, por meio de minha participação nas bancas examinadoras da referida tese, tanto de qualificação, quanto de defesa. É nesse sentido que o convite para escrever o prefácio de sua obra foi aceito por mim com grande satisfação.

O trabalho de Eurivalda faz um refinamento do instrumento diagnóstico elaborado por nós, em nosso livro, e investe esforços no sentido de elaborar, testar e comparar intervenções de ensino com base nas ideias defendidas por Vergnaud para o 4º ano do Ensino Fundamental. Nesse sentido, a leitura da obra permitirá algumas reflexões sobre usos das ideias da Teoria dos Campos Conceituais em sala de aula.

Este livro permite uma agradável e profunda viagem pelas premissas e paradigmas da Teoria dos Campos Conceituais e das Estruturas Aditivas como construídas por Vergnaud e adaptadas em nosso livro, com desfecho numa investigação em sala de aula da 3ª série (atual 4º ano) do Ensino Fundamental. Ele faz uma comparação do uso e efeito de dois suportes didáticos – materiais manipulativos e os diagramas propostos por Vergnaud – na apropriação e ampliação, pelos alunos, do campo conceitual aditivo. Ele faz ainda, por meio de um texto instigante, uma agradável confluência entre a teoria e a prática, oferecendo ao professor um subsídio teórico para a sua prática em sala de aula.

A leitura deste livro é de grande valia para todos os educadores e pesquisadores que atuam no Ensino Fundamental, incluindo aqui os de formação matemática, pedagógica e psicológica. Isto porque ela poderá ampliar os horizontes daqueles que buscam refletir sobre o processo de aprendizagem das crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental na área da Educação Matemática. Sua leitura permite, também, aos mestrandos e doutorandos, apreciar uma pesquisa com argumentos sólidos, fundamentação apropriada, metodologia cuidadosamente elaborada e uma análise detalhada dos resultados. Por isso, recomendo esta obra para todos aqueles que desejam compreender o multifacetado raciocínio matemático já no início da escolarização, assim como para pesquisadores e alunos de mestrado e doutorado que estão se iniciando na pesquisa.

Dra. Verônica Gitirana

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO 11

1 REFERENCIAL TEÓRICO 17
1.1 A Teoria dos Campos Conceituais 17
1.1.1 Campo Conceitual 18
1.1.2 Conceito 23
1.1.3 Situação 25
1.1.4 Invariantes Operatórios 29
1.1.5 Representação simbólica 32
1.1.6 Esquema 34
1.1.7 Cálculo numérico e cálculo relacional 39
1.1.8 Competências e habilidades 44

1.2 Campo Conceitual das Estruturas Aditivas 45
1.2.1 Conceitos envolvidos 47
1.2.2 Categorias de relações nas Estruturas Aditivas 47
1.2.3 As seis categorias de relações das Estruturas Aditivas segundo Vergnaud 50
1.2.4 Transformações e relações estáticas 60
1.2.5 As categorias de relações das Estruturas Aditivas segundo Magina et al. (2001) 61
1.2.6 As categorias de relações das Estruturas Aditivas segundo a releitura de Santana 63
1.2.7 As extensões das três primeiras categorias 65
1.2.8 Os diagramas de Vergnaud 67

2 O CONTEXTO DO ENSINO DO CAMPO ADITIVO COM O USO DO MATERIAL DIDÁTICO 71
2.1 O material didático 71
2.1.1 O uso do material didático no ensino da Matemática 72
2.1.2 O material didático usado neste estudo 74
2.1.2.1 O material dourado 75
2.1.2.2 O ábaco de copinhos 77

3 A EXPERIÊNCIA NA SALA DE AULA 79
3.1 Introdução 79

3.2 O estudo 80
3.2.1 Os instrumentos diagnósticos 83
3.2.2 A sequência de ensino 84
3.2.3 A intervenção de ensino 85

4 O DESEMPENHO DOS ESTUDANTES 87
4.1 Análise quantitativa 87
4.1.1 Análise comparativa geral do desempenho dos grupos pesquisados 88
4.1.2 Análise comparativa do desempenho dos grupos por categoria 90
4.1.2.1 Análise comparativa do desempenho dos grupos na categoria composição 91
4.1.2.2 Análise comparativa do desempenho dos grupos na categoria transformação 93
4.1.2.3 Análise comparativa do desempenho dos grupos na categoria comparação 94
4.1.2.4 Análise comparativa do desempenho dos grupos na categoria transformação de uma relação .. 96
4.1.2.5 Análise comparativa do desempenho dos grupos na categoria composição de várias transformações 98
4.1.3 Análise do desempenho dos grupos por extensão .. 100
4.1.3.1 Análise do desempenho dos grupos nas situações-problema protótipo 100
4.1.3.2 Análise do desempenho dos grupos nas situações-problema por extensão 102
4.1.4 Síntese da análise quantitativa do desempenho dos grupos 106

4.2 Análise qualitativa 108
4.2.1 Análise dos instrumentos diagnóstico 109
4.2.1.1 Análise dos erros detectados nos instrumentos diagnósticos 109
4.2.1.2 Síntese da primeira fase da análise qualitativa 141

4.2.2 Análise das atividades de casa 143
4.2.2.1 Análise dos erros detectados nas atividades de casa do grupo MD 143
4.2.2.2 Análise dos erros detectados nas atividades de casa do grupo DV 148
4.2.2.3 Síntese da segunda fase da análise qualitativa .. 155
4.2.3 Análise dos esquemas de resolução 158
4.2.3.1 Diferentes esquemas de ação 159
4.2.3.2 Conceitos-em-ação e teoremas-em-ação 185
4.2.3.3 Síntese da terceira fase da análise qualitativa.. 190
4.2.4 Breve discussão sobre o uso da operação inversa .. 191

REFERÊNCIAS

APÊNDICES
Apêndice A
Instrumentos diagnósticos do pré-teste e do pós-teste do estudo principal..... 203

Apêndice B
Sequência de ensino 214

Apêndice C
Atividades da entrevista 233

APRESENTAÇÃO

Este trabalho é fruto do interesse em investigar sequências de ensino que possam facilitar o trabalho do professor em sala de aula. Esta preocupação teve início no ano de 2005, quando fomos convidadas, eu e Profa. Dra. Irene Cazorla, a trabalhar com a disciplina "*Matemática: Conteúdos e Métodos*", no terceiro ano de Licenciatura Plena em Pedagogia, no Sul da Bahia – (Proação), com professores de escolas públicas, da Educação Infantil e Séries Iniciais do Ensino Fundamental. Todos os professores participantes do curso atuavam como professores da rede municipal da cidade em que residiam.

Esse era um novo desafio para nós, preocupadas em fazer um trabalho diferenciado, no qual tivéssemos condição de contribuir com a melhoria do ensino público. Assim, começamos a refletir sobre a nossa prática pedagógica e a trabalhar com materiais que facilitassem, cada vez mais, os processos de ensino e de aprendizagem desenvolvidos em sala de aula.

As reflexões nos impeliram a realizar uma pesquisa, com o objetivo de investigar quais conteúdos, conceituais e procedimentais, os 138 professores do Proação, que lecionavam no 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental, na região Sul da Bahia, consideravam mais importantes para serem trabalhados em suas salas de aula, na disciplina Matemática.

Nós, Santana e Cazorla (2005), trazemos os principais resultados dessa pesquisa, afirmando que esses professores davam maior importância e dedicação ao ensino e à aprendizagem das operações fundamentais com números naturais.

Ao realizarmos uma segunda pesquisa (PEIXOTO; SANTANA; CAZORLA, 2006), ainda no ano de 2005, contudo, com estudantes da 5ª série do Ensino Fundamental, diagnosticamos que eles ainda chegavam à 5ª série com graves problemas na resolução das operações fundamentais.

Essa contradição revelava que, apesar de o professor, dos dois primeiros ciclos, afirmar que dava especial atenção ao ensino das quatro operações básicas, os estudantes chegavam à 5ª série com dificuldades para realizar essas operações.

Em vista de nossas reflexões a partir do curso com os professores, dos resultados da pesquisa realizada com eles e, ainda, daqueles obtidos no estudo diagnóstico realizado com estudantes da 5ª série, nós, Dra. Eurivalda Santana, Dra. Sandra Magina e Dra. Irene Cazorla, fizemos um levantamento para avaliar a competência dos alunos desses 138 professores em resolver situações-problema[1] referentes à Estrutura Aditiva. Esse diagnóstico nos possibilitou fazer uma análise de 1.021 protocolos de estudantes que cursavam desde a 1ª série até a 4ª série do Ensino Fundamental, distribuídos entre 26 escolas públicas de seis municípios do Sul da Bahia.

---

[1] Para este estudo, adoto os termos situação-problema e situação como sinônimos. Uso as duas formas durante todo o texto para me referir aos problemas matemáticos em questão.

Tínhamos como objetivo principal investigar o domínio das operações de adição e subtração e os conceitos e as relações que envolvem as mesmas.

O desempenho dos estudantes partiu de uma média geral de 42,7% de acertos na 1ª série e chegou a 61,9% na 4ª série. Apesar de terem sido encontradas diferenças significativas nessa trajetória, apenas a 4ª série se distinguiu das três outras séries. Observamos uma estagnação na 3ª série com relação à 2ª, uma vez que a média obtida pelos estudantes desta série (51,1%) ficou muito próxima da média da 2ª série (52,6%).

A análise do desempenho dos estudantes parece apontar para uma falta de familiaridade com situações -problema envolvendo os diversos tipos de situações e conceitos que fazem parte do Campo Conceitual Aditivo.

Diante desses resultados, veio o interesse e a preocupação em buscar entender, dentre outros fatores, como se dá o processo de aprendizagem, quais as principais dificuldades dos estudantes na resolução, que tipo de material didático pode ser utilizado visando a um maior aproveitamento para o processo de aprendizagem.

O meu interesse aumentou de maneira significativa em relação à 3ª série[2], pois as diferentes oscilações de resultados indicam certa necessidade de um estudo mais detalhado, que precisa prezar pela organização, ordenação e ampliação das situações-problema oferecidas em

[2] A nova legislação assume o Ensino Fundamental de nove anos, fazendo com que a 3ª série seja equivalente ao 4º ano. Mas utilizo, durante todo o texto, a nomenclatura ainda usada pela escola na qual a pesquisa foi desenvolvida.

sala de aula, a fim de desenvolver plenamente o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas.

Quando digo organização, quero afirmar que é necessário seguir um trabalho que, gradativamente, incorpore situações-problema de maior complexidade. Ou seja, que o professor possa assumir objetivos bem definidos no que se refere à complexidade das situações -problema apresentadas em sala de aula. Ordenação, no sentido de pôr essa complexidade e outros fatores que vão além da linguagem figural dispostos convenientemente como meio de se chegar aos objetivos propostos, ampliar, no sentido de diversificar as situações-problema que são propostas em sala de aula, de forma a tornar mais extenso o domínio de conceitos que fazem parte do Campo Conceitual Aditivo.

Acredito que, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, seja possível proporcionar ao professor subsídios que lhe permitam conhecer em que nível de desenvolvimento seus estudantes se encontram, os tipos de situações-problema que são mais facilmente entendidos, os que apresentam maiores dificuldades e uma organização, ordenação e ampliação das situações-problema a serem apresentadas em sala de aula.

Somente a partir de análises desse tipo, o professor poderá lançar mão de estratégias facilitadoras e trabalhar gradativamente com as categorias de situações-problema que requeiram raciocínios mais sofisticados dos estudantes e, assim, expandir o referido Campo Conceitual.

Neste contexto, emergem questões a respeito da forma como podem ser planejadas as atividades pedagógicas do professor para o desenvolvimento do trabalho com as Estruturas Aditivas, bem como o desenvolvimen-

to de estratégias que facilitem o processo da aprendizagem. Assim, neste livro, busco apresentar os principais resultados do estudo da minha tese de doutorado, que teve como principal objetivo avaliar as contribuições que uma sequência de ensino baseada na classificação proposta pela Teoria dos Campos Conceituais traz para o domínio do Campo Aditivo por estudantes da 3ª série do Ensino Fundamental. E, além disso, avaliar se a utilização de suportes didáticos distintos produz efeitos diferentes no domínio desse Campo Conceitual.

A Teoria dos Campos Conceituais subsidiou a elaboração e o desenvolvimento da sequência de ensino e foi aplicada com o auxílio de dois diferentes suportes didáticos. Para isso, participaram, da parte experimental, duas turmas de estudantes da 3ª série do Ensino Fundamental. Numa turma, a intervenção foi pautada no uso de diagramas de Vergnaud e, na outra, no uso de materiais didáticos (ábaco de copinhos e material dourado).

Este livro encontra-se dividido em quatro capítulos. No Capítulo I, apresento a parte principal da Teoria dos Campos Conceituais, que se refere ao estudo realizado, pois considero importante fazer uma discussão detalhada de cada conceito. No Capítulo II, trago uma abordagem sobre o uso de suportes didáticos nas aulas de Matemática. Reservei, para o Capítulo III, a apresentação da experiência na sala de aula. E por fim, no Capítulo IV, apresento os principais resultados dos efeitos da intervenção de ensino, com análises quantitativa e qualitativa.

Desejo ao leitor uma boa leitura.

A autora

1 O REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, apresentamos as principais ideias do referencial teórico que fundamenta todo o trabalho da intervenção de ensino. Colocamos aqui a Teoria dos Campos Conceituais, com uma discussão detalhada sobre definições e pontos que compõem a referida teoria.

1.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria cognitivista que foi desenvolvida pelo psicólogo, professor e pesquisador francês Gérard Vergnaud. Essa teoria tem uma forte herança da teoria de Piaget e, também, alguns pontos da teoria de Vygotsky.

Ela proporciona um diagnóstico da aprendizagem e oferece elementos por meio dos quais é possível basear a análise do desenvolvimento de competências[1] e da aprendizagem de competências dos estudantes, que são consideradas complexas.

[1] Competência está definida na seção 1.1.8.

Dessa forma, a sua finalidade principal é fornecer informações que tornam possível estudar as filiações e rupturas entre os conhecimentos do ponto de vista do saber fazer e dos saberes expressos envolvidos. Por isso, ela se torna de grande interesse para vários campos do conhecimento, como Didática da Matemática, Didática da Física, Didática da Biologia, dentre outros.

Ela teve, porém, como ponto de partida, a Matemática, e mais especificamente os conteúdos envolvidos no estudo das Estruturas Aditivas e Multiplicativas, bem como as relações número-espaço e a álgebra. E a partir desses estudos, as demais Ciências também passam a ter interesse por essa Teoria.

1.1.1 Campo Conceitual

Para Vergnaud, um campo conceitual significa[2]:

> [...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, conteúdos, e operações de pensamento, conectados uns aos outros e provavelmente interligados durante o processo de aquisição (VERGNAUD, 1982, p. 40, tradução nossa).

Conforme Vergnaud (1982, p. 40, tradução nossa), o domínio de um dado Campo Conceitual ocorre num

[2] [...] an informal and heterogeneous set of problems, situations, concepts, relationships, structures, contents, and operations of thought, conected to one another and likely to be interwoven during the process of acquisition (VERGNAUD, 1982, p. 40).

"longo período de tempo, por meio da *experiência*, *maturação* e *aprendizagem*."[3]

Considerando que as crianças normalmente constroem um campo conceitual através da *experiência* na vida diária e na escola, o domínio de um campo envolve momentos que estão, também, fora do seu contexto escolar. O termo *maturação* é empregado por Vergnaud no mesmo sentido de Piaget, e refere-se, principalmente, ao crescimento fisiológico e ao desenvolvimento do sistema nervoso; a *experiência* refere-se à interação do sujeito com o objeto em situações de sua vida diária. Por fim, a *aprendizagem* é, por excelência, de responsabilidade escolar.

Vergnaud (1984, p. 1, tradução nossa)[4] afirma: "é um pouco trivial dizer que a aprendizagem depende dos conteúdos do conhecimento a ser aprendido". Concordamos com o autor, pois a aprendizagem é um fator que atua na construção do conhecimento da criança. Por exemplo, no âmbito escolar, muitas vezes ela depende diretamente da atuação do professor (suas escolhas, planejamento e desenvolvimento de experimentos didáticos). No âmbito social, depende de fatores alheios à vontade ou interferência do professor ou da escola, dentre eles: a alimentação, a estrutura familiar, o apoio da família.

Quando abordamos a aprendizagem, aportada na TCC, temos alguns pontos a levantar em relação à aprendizagem de crianças e à aprendizagem de adultos. Nas

---

[3] [...] over a long period of time through *experience*, *maturation*, and *learning* (VERGNAUD, 1982., p. 40).

[4] It is somewhat trivial to say that learning depends on the contents of knowledge to be learned (VERGNAUD, 1984, p. 1).

crianças e nos adolescentes, a aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo acontecem de forma conjunta, podemos dizer que lado a lado. E quando se analisa a aprendizagem de adultos, é preciso levar em consideração que as rupturas são vistas de uma forma que envolve os hábitos e as tendências do pensamento, e não apenas a ordem do desenvolvimento do aparelho psíquico.

Em relação ao conhecimento, Vergnaud (1996) o entende tanto como o saber fazer quanto como os saberes envolvidos. Segundo o autor, quando confrontamos os estudantes com novas situações, eles utilizam os conhecimentos adquiridos em suas experiências passadas, quando estavam com situações mais simples e mais familiares, e tentam adaptá-las às novas situações (VERGNAUD, 1988a, p. 141).

Para este autor, o conhecimento pode ser apresentado de maneira explícita ou de maneira implícita:

> O conhecimento dos estudantes pode ser explícito, no sentido de que eles podem expressá-lo de forma simbólica (língua natural, esquemas e diagramas, sentenças formais etc.) Seu conhecimento pode ser implícito, no sentido de que eles podem usá-lo na ação, escolhendo as operações adequadas, sem serem capazes de expressar as razões para esta adequação (VERGNAUD, 1988a, p. 141, tradução nossa).[5]

---

[5] Students' knowledge may be explicit, in the sense that they can Express it in a symbolic form (natural language, schemas and diagrams, formal sentences, etc.). Their knowledge may also be implicit, in the sense that they can use it in action, by choosing adequate operations, without being able to express the reasons for this adequacy (VERGNAUD, 1988a, p. 141).

É possível reconhecer, por exemplo, a forma explícita através da linguagem natural ou do uso de diagramas, dentre outras formas. A forma implícita é mais difícil de ser detectada, pois está contida na ação do estudante e nas relações de pensamento estabelecidas por ele.

Com base em nossas experiências com o ensino e a formação de professores, formulamos um exemplo (fictício), colocado a seguir, que pode facilitar a compreensão de como aparece uma forma implícita.

Sendo dada a seguinte situação-problema para um estudante da 1ª série do Ensino Fundamental:

- Madalena tem quatro bonecas e Meire tem onze bonecas.
  Quantas bonecas elas têm juntas?

O estudante registra a seguinte resolução:

$$\begin{array}{r} 4 \\ \underline{11} \; + \\ 15 \end{array}$$

Resposta: 15 bonecas

Estamos partindo do pressuposto que o estudante conheça a operação de adição. Podemos citar, por exemplo, a existência de conhecimentos explícitos, quando o estudante arma a conta corretamente colocando a unidade 1 de forma correspondente à unidade 4; essa organização traz indícios de que o estudante possui algum tipo de conhecimento que lhe permite armar e efetuar essa operação de maneira correta. O estudante pode conhecer as regras do algoritmo da adição, pode conhecer as

características básicas do sistema de numeração decimal posicional, e certamente foram conhecimentos desse tipo que permitiram que ele armasse e efetuasse corretamente a operação.

Um conhecimento implícito que podemos destacar refere-se à escolha da operação correta, pois não é possível identificar os motivos que levaram o estudante a escolher a operação de adição e não escolher, por exemplo, a operação de subtração. E, muitas vezes, quando questionamos um estudante sobre os motivos que o levaram a escolher uma operação correta, ele não consegue expressar as razões que o levaram a tal escolha.

Para Vergnaud (1988a), uma das principais motivações para se estudar um Campo Conceitual é a compreensão de filiações e rupturas que ocorrem na aquisição do conhecimento pelo estudante.

> O principal motivo pelo qual os pesquisadores da Educação Matemática devem estudar [...] os sistemas compreensivos como campos conceituais é compreender filiações e saltos na aquisição do conhecimento pelos estudantes (VERGNAUD, 1988a, p. 141, tradução nossa)[6].

Os diferentes Campos Conceituais não são independentes, e uns podem ser importantes para a compreensão de outros. Dessa forma, Vergnaud (1996)

---

[6] The main reason that mathematics education researchers should study [...] compreensive systems as conceptual fields is to understand filiations and jumps in students' acquisition of knowledge (VERGNAUD, 1988a, p. 141).

considera útil falar em distintos Campos Conceituais se eles puderem ser consistentemente descritos. Ele crê que é praticamente impossível estudar as coisas separadamente, mas, por isso mesmo, é preciso fazer recortes, e é nesse sentido que os Campos Conceituais são unidades de estudo frutíferas capazes de dar sentido aos problemas e às observações feitas em relação à conceitualização.

1.1.2 Conceito

Existe, naturalmente, no meio acadêmico, uma forte tendência de colocar conceito e definição como sinônimos. Estamos assumindo que existe uma diferença básica entre essas palavras. Admitimos o conceito como a formulação de uma ideia através das palavras e do pensamento. E a definição, como o ato de determinar a extensão e os limites de um objeto ou assunto.

Para Vergnaud (1996, p. 156), um conceito não pode ser reduzido a sua definição, pelo menos quando nos interessa a sua aprendizagem e o seu ensino.

Um conceito não tem sentido em si mesmo, mas adquire sentido quando está envolvido numa situação-problema a ser resolvida. "Este processo de elaboração pragmática é essencial para a psicologia e para a didática" (VERGNAUD, 1996, p. 156).

Na prática, podemos observar que os estudantes e até mesmo os professores têm dificuldades para observar que a compreensão de um simples conceito não deriva, apenas, de um tipo de situação e que uma situação sempre envolve mais de um conceito.

A natureza das situações-problema com as quais os estudantes são confrontados pode ser tanto teórica como prática. É importante levar em consideração a relevância do papel da linguagem e do simbolismo na conceitualização e na ação.

A compreensão de um conceito pelo estudante não se dá quando este é confrontado apenas com uma única situação. Por exemplo, ao buscar o domínio do conceito da operação de adição por um estudante das séries iniciais do Ensino Fundamental, é necessário confrontá-lo com:

- uma série de situações que dê sentido a esse conceito, como situações-problema que tragam a ideia de juntar, transformar, comparar, o algoritmo da adição, dentre outras situações que podem ser oferecidas;
- condições que facilitem a compreensão das propriedades da adição (associativa, comutativa, elemento neutro), que eles sejam direcionados a utilizar tais propriedades, mesmo sem colocá-las de forma explícita;
- as formas de representação dessas propriedades e com os símbolos que fazem parte da definição da adição.

Na TCC, a construção de um conceito envolve um tripé de conjuntos e, segundo essa teoria, o conceito é chamado simbolicamente de C=(S, I, R), em que:

> *S* é um conjunto de situações que tornam o conceito significativo; *I* é um conjunto de invariantes (propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e usados

> pelo sujeito para analisar e dominar essas situações; *R* conjunto de formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permite representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante) (VERGNAUD, 1996, p. 166).

O conjunto de situações é o **referente** do conceito, os invariantes são os **significados** do conceito, enquanto as representações simbólicas são os **significantes**.

Nessa definição de conceito, dada pela TCC, não se pode falar em conceito sem citar as diversas situações a ele associadas, e sem destacar os invariantes operatórios que levam o indivíduo a reconhecer os elementos pertinentes à situação. É nesse sentido que Vergnaud (1988a, p. 141; 1997, p. 6) define conceito como um tripé de três conjuntos.

1.1.3 Situação

A definição mais clássica que temos, associada à situação, está dentro da Didática Francesa, e é dada por Brousseau na Teoria das Situações Didáticas:

> Um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um certo "milieu"[7], contendo eventualmente instrumentos ou objetos, e um sistema educativo (o professor) para que estes alunos adquiram um saber constituído ou em constituição (BROUSSEAU, 1997).

[7] "Milieu" é tudo com que o sujeito interage para construir o conhecimento.

Na Teoria dos Campos Conceituais, todavia, a situação não está colocada com o amplo sentido dado por Brousseau. É colocada no sentido de tarefa, de modo que toda situação complexa pode ser vista como uma combinação de tarefas.

Quando nos referimos ao desempenho dos estudantes nas tarefas com as quais são confrontados, somos direcionados a analisar esse processo a partir de cada subtarefa, pois o desempenho, em cada subtarefa, afeta o desempenho global.

Os processos cognitivos e as respostas dos sujeitos são funções das situações com as quais são confrontados. Vergnaud chama a atenção para duas ideias que são consideradas principais para as situações:

1) a *de variedade:* existe uma grande variedade de situações num dado campo conceitual, e as várias situações são um meio para gerar de maneira sistemática o conjunto de classes de situações possíveis;
2) a *de história*: os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com as quais eles são confrontados e dominam progressivamente, particularmente pelas primeiras situações susceptíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que lhes são ensinados (VERGNAUD, 1990, p. 150, tradução nossa, grifo nosso)[8].

---

[8] 1) celle de variéte: il existe une grande varieté de situations dans um champ conceptuel donné, et les variables de situation sont un moyen de générer de manière systématique l'ensemble des classes possibles;
2) celle d'histoire: les connaissances des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées et maîtrisées progressivement, notamment par lês premières situations susceptibles de donner

Estas ideias significam que, em cada Campo Conceitual, existe uma grande variedade de situações, e os conhecimentos dos estudantes são moldados pelas situações que, progressivamente, vão dominando. Parte do conhecimento dos estudantes decorre das primeiras situações que eles conseguem dominar ou das experiências adquiridas durante as tentativas que fazem tentando modificá-las.

Dessa forma, são as situações que dão sentido aos conceitos, tornando-se o ponto de entrada para um dado Campo Conceitual. Contudo, um só conceito precisa de uma variedade de situações para tornar-se significativo. Da mesma maneira, uma só situação precisa de vários conceitos para ser analisada.

Estes são alguns dos motivos que levaram ao estudo de Campos Conceituais e não de situações isoladas ou conceitos isolados. Segundo Verganud (1994), outra razão vem do fato de os estudantes dominarem certas classes de situações antes de dominarem outras; podem se passar vários anos para que um estudante domine uma situação simples e passe a dominar uma situação mais complexa. Durante esse processo, o estudante passa por:

> [...] situações, palavras, algoritmos e esquemas, símbolos, diagramas e gráficos ... e aprenderá, às vezes por descoberta, às vezes por repetição, às vezes representando e simbolizando, às vezes diferenciando, às vezes por redução de diferentes coisas para outras. Isso porque o pano-

---

du sens aux concepts et aux procédures qu'on veut leur enseigner (VERGNAUD, 1990, p. 150).

rama da aquisição do conhecimento é muito complexo [...] (VERGNAUD, 1994, p. 46, tradução nossa)[9].

A seguir, apresentamos uma situação usada para introduzir o conceito de adição. Ela foi retirada de um livro de Matemática da alfabetização[10]. Com este exemplo, objetivamos ilustrar o envolvimento de vários conceitos numa única situação.

PREPARANDO PARA A ADIÇÃO

João tem um carrinho vermelho e mais 2 carrinhos azuis. Vamos ver quantos carrinhos ele tem?
Observe:

1 + 2 = 3

Quadro 1.1.1 - Atividade do livro de Matemática para introdução da adição.
Fonte: Almeida (1997, p. 96).

A situação busca a compreensão de um dos conceitos do Campo Conceitual Aditivo, que é o de composição, isto é, de conceber o todo como uma composição aditiva das partes. Supõe-se que uma criança de 6 anos de idade, quando colocada diante dessa situação, já tem o domínio

[9] [...] situations, words, algorithms and schemes, symbols, diagrams and graphs ... and will learn sometimes by discovering, sometimes by repeating, sometimes by representing and symbolizing, sometimes by differentiating, sometimes by reducing different things to one another. Because the landscape of knowledge acquisition is so complex [...] (VERGNAUD, 1994, p. 46).

[10] Correspondente ao 1º ano do Ensino Fundamental, na atual legislação.

de outros conceitos como, por exemplo, conservação de quantidades e cardinal. Segundo Vergnaud (1996), um conceito torna-se significativo por meio de situações distintas. Contudo, o sentido do conceito não está nas situações, assim como não está nos símbolos e nem nas palavras.

O sentido se dá numa relação direta dos estudantes com as situações e com as representações simbólicas, porém essa relação tem uma ligação com os esquemas que o estudante vai utilizar numa dada situação.

Até aqui foram discutidas algumas ideias da TCC: ideia de Campo Conceitual; que encaminhou para a ideia de conceito (tripleto: situação, invariantes e representação simbólica); e para como as situações dão sentido ao conceito, chegando ao conceito de situação. Na sequência, serão discutidos os demais componentes do tripé (invariante e representação simbólica), assim como a definição de esquema, cálculo relacional, cálculo numérico e competências.

1.1.4 Invariantes operatórios

Ao organizar a sua ação diante de uma dada situação, o estudante está lançando mão de esquemas[11] de ação que, de acordo com Vergnaud (1996, p. 162), são geralmente compostos, de forma essencial, por invariantes operatórios. Assim, os invariantes operatórios, que são os conhecimentos contidos nos esquemas, são designados de "conceito-em-ação" e "teorema-em-ação".

[11] Esquema está claramente definido na seção 1.1.6.

Em breves palavras, "[...] um teorema-em-ação é uma proposição que pode ser verdadeira ou falsa. Um conceito-em-ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante" (VERGNAUD, 1998, p. 168, tradução nossa)[12].

Existem, basicamente, três tipos lógicos de invariantes operatórios:

> [...] - *invariantes de tipo "proposições"*: susceptíveis de serem verdadeiros ou falsos; os teoremas-em-ação são invariantes deste tipo. [...] - *invariantes de tipo "função proposicional"*: não são susceptíveis de serem verdadeiras ou falsas, mas constituem tijolos indispensáveis à construção das proposições. [...] - *invariantes de tipo "argumento"*: quem diz função proposicional e proposição diz argumento (VERGNAUD, 1996, p. 163-164, grifo do autor).

De acordo com Vergnaud (1996), a relação entre funções proposicionais e proposições é uma relação dialética, uma vez que as funções proposicionais (conceitos) são ingredientes das proposições (teoremas), e as proposições são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos. Ou seja, em Matemática, os conceitos (ou definições) e os teoremas são construídos em estreita ligação.

Existe distinção entre proposições e funções proposicionais. Vergnaud (1996, p. 163-166) destaca, entre as funções proposicionais, a existência dos seguintes tipos:

---

[12] [...] A theorem-in-action is a proposition which is held to be true; A concept in action is an object, a predicate, or a category which is held to be relevant (VERGNAUD, 1998, p. 168).

– as funções com um argumento, as propriedades. Por exemplo: “Dois é um número primo”;
– as funções com dois argumentos, as relações binárias, que relacionam dois elementos entre si. Por exemplo: “Um grupo de **10 unidades** é igual a **1 dezena**”;
– as funções com três argumentos, as relações ternárias, que relacionam três elementos entre si. Por exemplo: “O **cinco** multiplicado por **três** dá **quinze**”;
– as funções com quatro argumentos, as relações quaternárias, que relacionam quatro elementos entre si. Por exemplo, as funções de proporcionalidade: “Se temos a igualdade entre duas razões, então **a** está para **b** assim como **c** está para **d**”;
– as funções com mais de quatro argumentos relacionam mais de quatro elementos entre si. Por exemplo: Em **um número** na **forma decimal**, à **esquerda da vírgula** é indicada a **parte inteira**, e à direita, a **parte decimal**.

Ressaltamos que um teorema-em-ação não é um verdadeiro teorema científico, nem um conceito-em-ação seria um conceito científico. Seriam se fossem colocados de forma explícita pelo estudante. Ou seja, quando os discutimos na ciência, conceitos e teoremas são colocados de forma explícita, assim podemos discutir a sua veracidade e pertinência.

Vergnaud (1998, p. 175) coloca que conceitos-em-ação e teoremas-em-ação podem, progressivamente, tornar-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos. Considera, ainda, que eles têm pouca relevância, validade e

que o relato feito pelo estudante nem sempre é suficiente para que possa ser reconhecido. Já os conceitos e os teoremas explícitos podem ser desenvolvidos sobre domínios mais amplos e em sistemas fortemente integrados. "Está ideia foi claramente expressa por Vygotsky" (1962 apud VERGNAUD, 1998, p. 175, tradução nossa)[13].

Em linhas gerais, os estudantes não conseguem explicar ou mesmo expressar em linguagem natural conceitos-em-ação e teoremas-em-ação utilizados. Muitas vezes, na resolução de uma situação, os estudantes trabalham os dados usando, implicitamente, em seus esquemas, conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Porém, eles podem também ser explícitos ou tornar-se explícitos; é aí que entra uma das mais difíceis funções do ensino, que é a de descontextualizar, ou seja, ajudar o estudante a construir conceitos e teoremas de forma explícita, que já são estabelecidos como saberes científicos. E isso se dá a partir do conhecimento implícito. É dessa forma que conceitos-em-ação e teoremas-em-ação podem, progressivamente, tornar-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos, contudo, para se chegar a esse processo, pode se levar um grande período de tempo.

1.1.5 Representação simbólica

Quando abordamos a concepção de conceito, na seção 1.1.2, colocamos que sua formação tem como base um tripé. Tal tripé é formado pelas situações (S), pelos

[13] "This Idea was clearly expressed by Vygotsky" (1962 apud VERGNAUD, 1998, p. 175).

invariantes (I) e pelas representações simbólicas (R). Até aqui, foram discutidos os dois primeiros, agora vamos abordar o último componente desse tripé.

O sentido de cada representação simbólica é diferente para cada estudante, ou seja, o que faz sentido para um estudante pode não fazer para o outro. Como visto anteriormente, o sentido é uma relação do estudante com as situações e as suas representações.

As representações simbólicas são, dentre outras, a linguagem natural, os gráficos, os diagramas e as sentenças formais, e podem ser usadas para pontuar e representar os invariantes operatórios e, portanto, representar as situações e os procedimentos para lidar com eles.

Vergnaud (1982, p. 53) apresenta duas vantagens do uso das representações simbólicas:

1) ajudar os estudantes a resolver as situações-problema;
2) ajudar os estudantes a diferenciar várias estruturas e categorias de situações-problema.

Considera-se que os significantes e a organização de esquemas de ação desempenham um papel essencial na resolução de qualquer situação. Para Vergnaud (1996), clarificar a função da linguagem e dos outros significantes é, pois, um trabalho teórico indispensável. E nessa Teoria, esta função é tripla:

– ajuda a designação e, portanto, a identificação dos invariantes: objetos, propriedades, relações, teoremas;
– ajuda o raciocínio e a inferência;
– ajuda a antecipação dos efeitos e dos objetivos, a

> planificação e o controle da ação (VERGNAUD, 1996, p. 180).

Na vida diária, quando nos defrontamos com uma situação-problema nova, construímos um modelo de esquema de ação para entendê-la, descrevê-la e prever o que vai acontecer. Este modelo pode ser correto ou não, pode ser vago, confuso, incompleto, mas é, sobretudo, funcional para quem o está construindo e pode ser modificado até atingir a sua funcionalidade.

Dessa forma, cada tipo de representação simbólica possui sua importância e utilidade. Quando o sujeito se encontra diante da situação a ser resolvida, ele vai escolher a representação, para seu esquema, conforme a importância que ela tiver para ele.

Os esquemas evocados no sujeito é que dão sentido a uma dada situação. E o conceito de esquema, como veremos, está ligado ao conceito de invariante operatório.

1.1.6 Esquema

"Esquema *é a organização invariante da conduta para uma dada classe de situações*" (VERGNAUD, 1990, p. 136, tradução nossa, grifo do autor)[14]. Baseada nessa afirmativa, é possível dizer que o esquema atende a uma organização feita pelo próprio sujeito, que tem como objetivo principal conduzir o processo de resolução de uma dada situação.

---

[14] <<schéme>> l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée (VERGNAUD, 1990, p. 136).

Na TCC, distingue-se a classe de situações para as quais os sujeitos dispõem, em seu repertório, das competências necessárias para o seu tratamento e a classe de situações nas quais os sujeitos não dispõem, em seu repertório, de competências necessárias para o seu tratamento.

Segundo Vergnaud (1996, p. 156), o conceito de esquema é muito importante para ambas as classes de situação, pois vai organizar as ações desse sujeito diante dessas situações. Na primeira classe de situações, os esquemas são únicos, ou seja, os esquemas já são, em sua maioria, automatizados. Já na segunda classe, acontece o que podemos classificar de desencadeamento de esquemas, pois será necessário que o estudante acomode, desacomode e acabe por descobrir novas formas de conduzir o surgimento de novos esquemas.

A Teoria dos Campos Conceituais é cognitivista e, como tal, tem, dentre os seus principais conceitos, o de esquema. Isso se deve a sua capacidade de poder articular o comportamento e vários aspectos da representação. Vejamos o que diz o seu autor em relação a isso:

> O conceito de esquema é essencial para qualquer teoria cognitivista, porque ele articula, dentro dele mesmo, ambos, o comportamento e os aspectos representacionais: regras de ação e invariantes operatórios. Os esquemas estão no âmago da cognição e no âmago do processo de assimilação-acomodação (VERGNAUD, 1997, p. 27, tradução nossa)[15].

[15] The concept of scheme is essential to any theory of cognition because it articulates into a unit both its behavioural and representational features: rules of action and operational invariants. Schemes

"Um esquema, para Piaget, é uma totalidade dinâmica que une os ingredientes da atividade funcional e pode tanto acomodar para novas situações como assimilá-las" (VERGNAUD, 1987, p. 231, tradução nossa)[16].

A propriedade de universalidade já está no esquema. Existem esquemas puramente sensório-motores, como, por exemplo, subir uma escada, e esquemas sensório-motores simbólicos, como, por exemplo, fazer uma enumeração. Há uma grande variedade de exemplos de esquemas que são mobilizados na aprendizagem da Matemática. E boa parte dos esquemas matemáticos refere-se a espaço, geometria e algoritmos, e é possível ter todos compondo um só esquema.

Para Vergnaud (1997), algoritmos são esquemas compostos por objetivos, expectativas, regras, invariantes operatórios e possibilidades de inferência. Contudo, eles não são apenas funcionais, mas também efetivos.

Quando se analisa as relações entre os algoritmos e as características da situação-problema que se quer resolver, podemos notar certa confiabilidade no conhecimento que aparece de forma explícita ou de forma implícita.

A seguir, um exemplo de esquemas mobilizados normalmente no algoritmo da adição de números naturais, que se espera que sejam dominados por estudantes ao final da 4ª série:

---

are at the heart of cognition, and at the heart of the assimilation-accommodation process (VERGNAUD, 1997, p. 27).

[16]A scheme, for Piaget, is a dynamic totality that ties together all the ingredients of a functional activity and can both accomodate to new situations and assimilate them (VERGNAUD, 1987, p. 231).

- Pede-se ao estudante que efetue a soma de 405 mais 98. Vejamos os passos seguidos pelo estudante:

Escreve o número 405;

$$405$$

Escreve o número 98 abaixo do número 405, começando pela coluna das unidades;

$$\begin{array}{r} 405 \\ \underline{98} \; + \end{array}$$

Calcula a soma dos números em cada coluna, seguindo as regras do agrupamento do sistema de numeração decimal. Primeiro, o agrupamento na coluna das unidades é 13, como é superior a 10, anota 3, que é o algoritmo das unidades dessa soma, e coloca o algarismo 1, das dezenas, no alto da coluna à esquerda;

$$\begin{array}{r} 1 \\ 405 \\ \underline{98} \; + \\ 3 \end{array}$$

Depois, faz o agrupamento na coluna das dezenas que é 10, anota 0, o algoritmo das unidades dessa soma (que corresponde à dezena das parcelas que estão sendo somadas) e coloca o algarismo 1, das dezenas dessa soma (que corresponde à centena das parcelas que estão sendo somadas) no alto da coluna à esquerda;

$$\begin{array}{r} 11 \\ 405 \\ \underline{98} \; + \\ 03 \end{array}$$

Por último, faz o agrupamento na coluna das centenas que é 5, e como é inferior a 10, anota 5, que é o algarismo dessa soma (que corresponde à centena das parcelas que estão sendo somadas).

```
 11
405
 98 +
---
503
```

Em geral, os estudantes não conseguem expressar, por meio da linguagem natural, esses cinco passos descritos acima, mesmo sabendo efetuá-los corretamente. Com este exemplo, objetivamos ilustrar o quanto de implícito pode conter um simples esquema operacionalizado pelo estudante. "Um esquema assenta sempre numa conceitualização implícita" (VERGNAUD, 1996, p. 159).

Vergnaud (1998, p. 172) coloca que, em Matemática, existem esquemas perceptivo-gestuais, como os de contar um conjunto de objetos, fazer um gráfico ou um diagrama, fazer a simetria de uma figura plana usando apenas régua e compasso. Existem também duas outras importantes categorias, que são:

- os esquemas verbais: como o de fazer um discurso, falar em linguagem corrente cometendo alguns erros específicos;
- os esquemas sociais: como o de convencer outra pessoa ou o de gerenciar conflitos.

Para concluir essa seção, colocamos algumas especificações mostradas por Vergnaud (1998, p. 173), que podem ajudar a compreender melhor o que é um esquema.

Ele as chama de ingredientes dos esquemas: “1. metas e antecipações; 2. regras de ação [...]; 3. invariantes operatórios; 4. possibilidades de inferência”. A seguir, iremos explicá-las para uma melhor compreensão:

- Metas e antecipações: as compreendo como sendo os objetivos ou os passos que podem ser traçados ao se iniciar a resolução de uma situação, e que serão seguidos durante a resolução;
- Regras de ação: essas são do tipo "se ... então" que constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema;
- Invariantes operatórios: são eles que constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas;
- Possibilidades de inferência: são os raciocínios empregados pelo sujeito e que permitem "calcular" as regras e antecipações a partir das informações e dos invariantes operatórios de que dispõe o sujeito.

Enfim, podemos dizer que o esquema é a forma através da qual o estudante estrutura a resolução de sua atividade, ou seja, é a organização invariante que o estudante dá para uma classe de situações, buscando solucionar a tarefa colocada.

1.1.7 Cálculo numérico e cálculo relacional

Faz-se relevante deixar clara a diferença entre cálculo numérico e cálculo relacional e suas implicações no ensino das Estruturas Aditivas.

O cálculo numérico é aquele comumente conhecido por todos. Refere-se às operações usualmente colocadas nas resoluções matemáticas onde envolvemos os números com as suas possíveis operações, como, por exemplo, as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, dentre outras.

Mas o que é o cálculo relacional?

O cálculo relacional refere-se "às operações de pensamento necessárias para que haja a manipulação das relações envolvidas nas situações" (VERGNAUD, 1982, p. 40, tradução nossa)[17].

As relações são, muitas vezes, simples comprovações que se pode fazer sobre aquilo que temos em nossa realidade. Estas relações podem não ser verificadas diretamente, precisando que seja feita sobre elas certa inferência. Quando temos relações que são verificáveis, Vergnaud (1991, p. 23) afirma que as crianças nem sempre são capazes de reconhecê-las, pois estas podem estar além de suas possibilidades intelectuais.

Para dar exemplo de uma relação verificável, fundamentamo-nos nas experiências realizadas por Piaget (1975), e apresentamos, a seguir, uma situação que pode ser difícil para a compreensão de uma criança de 4 anos. Vejamos:

– Apresente dois recipientes iguais, A e B, que contenham a mesma quantidade de líquido, e dois recipientes iguais, C e D, vazios (conforme o

[17] [...] the operations of thought that are necessary to handle the relationships involved in the situation" (VERGNAUD, 1982, p. 40).

modelo da Figura 1.1.1). Mostre os recipientes à criança e pergunte: Os recipientes A e B possuem a mesma quantidade de líquido? Em seguida, na frente da criança, pegue o recipiente B e divida todo o seu líquido nos recipientes C e D. Depois pergunte: A quantidade de líquido do recipiente C mais a quantidade de líquido do recipiente D é igual à quantidade de líquido do recipiente A?

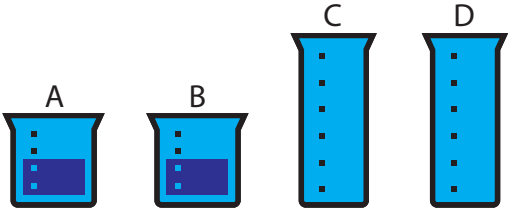


Figura 1.1.1- Recipientes A e B com líquido e recipientes C e D sem líquido.

Segundo Piaget (1975, p. 26), para as crianças dessa idade, que estão diante de situações desse tipo, "a quantidade de líquido [...] aumenta ou diminui em função da forma ou do número de recipientes." A criança dessa idade apresenta dificuldades para compreender essa conservação de quantidades, pois certamente tal compreensão está além de suas possibilidades intelectuais.

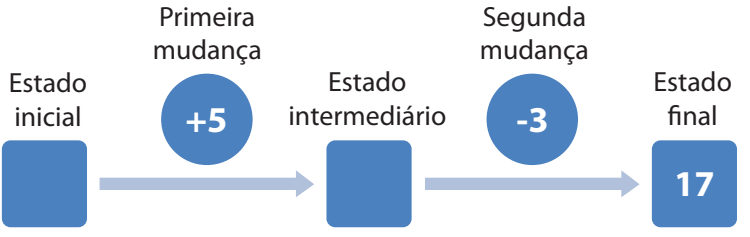
Segundo Vergnaud (1991, p. 24)[18], "[...] as relações seriam poucas se fossem apenas na forma de verificações." O trabalho da inteligência pode conduzir de igual maneira a deduções, inferências e construções. Existem duas grandes formas de dedução:

[18] [...] las relaciones serían poca cosa si fueran únicamente verificaciones (VERGNAUD, 1991, p. 24).

Primeira forma – consiste em deduzir através da conduta ou de uma regra de conduta e de relações que já estejam verificadas ou aceitas. Por exemplo, colocamos a seguinte proporção $1/5 = 7/x$, para se determinar o valor de x. As relações de uma proporção já estão estabelecidas. Então o estudante precisa deduzir o valor de x através de regras de conduta que já foram verificadas e aceitas.

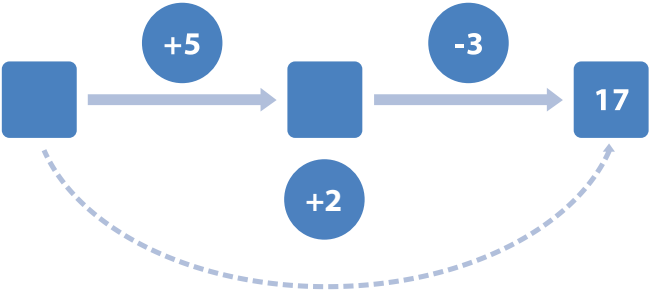
Segunda forma – consiste em deduzir novas relações a partir de relações já verificadas e aceitas. Vejamos um exemplo: Clara coleciona CDs. E ganhou 5 CDs de seu amigo. Clara resolveu dar 3 CDs, que estavam repetidos, para a sua prima. Agora Clara tem 17 CDs. Quantos CDs Clara tinha antes?

Segue uma sequência de diagramas que vai nos permitir entender melhor que existem algumas deduções de novas relações.

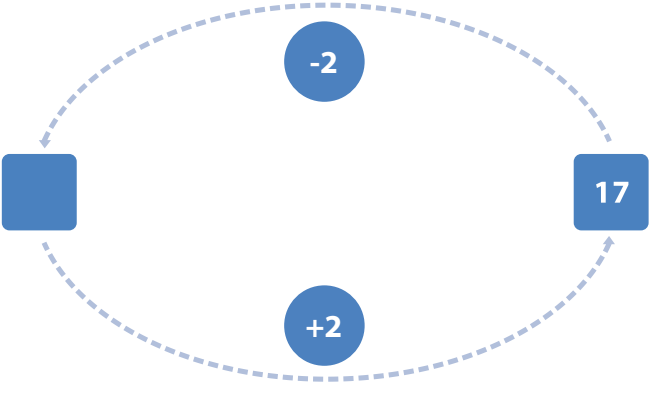


Primeira dedução: podemos fazer a dedução de uma nova relação através da composição das duas relações dadas. Mais especificamente, será feita uma composição das transformações +5 e -3 para deduzir a nova relação +2. Significa que o estudante precisa compreender que, para descobrir qual a quantidade de CDs que Clara tinha antes é necessário determinar a transformação que aconteceu na quantidade de CDs de Clara.

Pela experiência na correção dos instrumentos de Santana, Cazorla e Campos (2006; 2007), podemos dizer que estudantes das séries iniciais tendem a adicionar todos os valores numéricos apresentados no enunciado. Eles demonstram, com esse esquema, que, para esse tipo de situação, não conseguem deduzir uma nova relação a partir das relações já estabelecidas.



Segunda dedução: podemos fazer outra dedução para encontrar o estado inicial. A relação +2, deduzida anteriormente, permite-nos passar do estado inicial para o estado final, então -2 permite passar do estado final para o estado inicial. Assim, deduz-se uma nova relação através de uma relação já feita.



Ao subtrair 2 de 17, encontramos o estado inicial.

O exemplo acima traz aspectos importantes de um dado cálculo relacional. Foram realizados dois cálculos relacionais: um, ao se deduzir a necessidade de compor duas relações; e outro, ao se deduzir a necessidade de fazer a recíproca de uma relação.

Segundo Vergnaud (1991), a noção de cálculo relacional é fundamental. Este tipo de cálculo será encontrado em todas as partes, pois sua noção se aplica a todas as relações (binária, ternária, quaternária). O cálculo relacional tem uma estreita relação com a noção de esquemas.

Como vimos na seção anterior, o esquema é a organização invariante da conduta para uma dada classe de situações. Então, a relação entre o esquema e o cálculo relacional está explicada pelo fato de ambos estarem envolvidos na organização do pensamento.

1.1.8 Competências e habilidades

Considerando que as competências e habilidades matemáticas são elementos importantes quando analisamos a ampliação do domínio de um dado Campo Conceitual, temos a intenção de definir operacionalmente como vamos utilizar cada um desses termos.

Tanto as competências como as habilidades têm os seus significados ligados ao desempenho do estudante diante de uma dada situação.

Vergnaud (1987) coloca que as competências dos estudantes são ferramentas de essencial importância para a descrição e a análise de lentas aquisições feitas pelos estudantes e que são denominadas complexas. Ainda afir-

ma que a competência de estudantes pode ser completamente traçada através de suas ações numa dada situação.

De acordo com Vergnaud (1987), as competências dos estudantes na resolução de situações-problema surgem na escolha certa dos dados e das operações, sendo que nenhum raciocínio ou explicação é colocado de forma explícita.

As competências dos estudantes, na resolução de situações-problema, aparecem quando são feitas escolhas corretas; não queremos afirmar, com isso, que os estudantes possuem o domínio do conceito. Eles podem fazer escolhas corretas sem, contudo, saber que conceito está relacionado àquela ação. Porém, ao saber resolver o que a ação propõe, o estudante coloca em prática sua habilidade, ou seja, a competência leva à habilidade. Em suma, a habilidade é a ação real, e a competência é o que leva o estudante a ter aquela ação.

1.2 CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS ADITIVAS

De acordo com Vergnaud (1996), o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas é, ao mesmo tempo, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permite analisar essas situações como tarefas matemáticas.

Vergnaud (1988b) coloca que a análise da aprendizagem das Estruturas Aditivas requer que se leve em consideração as mudanças ao longo do tempo e, também, o uso do modelo de uma operação unária. Além disso, deve-se

considerar que existem fatores inatos na própria criança, dentre eles, podemos citar os procedimentos e os erros. Ainda segundo o autor, na prática podemos observar que

> Os matemáticos geralmente não levam em consideração as mudanças ao longo do tempo e veem a adição como uma lei interna da combinação binária. Na verdade, os estudantes tendem a fazer com as duas, a unária e binária, a concepção da adição, dependendo da situação que ele precisa dominar (VERGNAUD, 1988b, p. 17, tradução nossa)[19].

Dessa forma, ao analisar o desempenho do estudante, é preciso considerar esses fatores: mudanças que ocorrem com o passar do tempo, bem como a dimensão (unidimensional, bidimensional, tridimensional, ou...) na qual o estudante opera os elementos envolvidos na situação.

Nesse contexto, o autor propõe uma classificação específica para as situações-problema aditivas, feita com vistas a ajudar na interpretação dos procedimentos e, consequentemente, dos erros que os estudantes fazem ao tentar resolver as situações. Segundo Vergnaud (1982), essa classificação oferece uma estrutura teórica que permite entender o significado das diferentes representações simbólicas da adição e da subtração, além de servir como base para o desenho de experimentos sobre esses processos matemáticos.

---

[19] Mathematics does not usually take change over time into consideration, and sees addition as an internal binary law of combination. Actually students have to do with both a unary and a binary conceptions of addition, depending on the situations they have to master (VERGNAUD, 1988b, p. 17).

1.2.1 Conceitos envolvidos

Importantes conceitos matemáticos compõem o Campo Conceitual Aditivo:

> Vários conceitos importantes estão envolvidos nas estruturas aditivas: medida, cardinal, estado, transformação, comparação, diferença, inversão e número são essenciais no processo de conceitualização empreendido pelos estudantes (VERGNAUD, 1988b, p. 8, tradução nossa)[20].

Além desses conceitos, tem-se, naturalmente, os conceitos de adição e subtração. Apenas para enfatizar o que já foi colocado anteriormente, esses conceitos não aparecem sozinhos, eles sempre estarão acompanhados de propriedades e teoremas que lhes vão atribuir condições de serem utilizados nos esquemas dos estudantes.

1.2.2 Categorias de relações nas Estruturas Aditivas

Vergnaud (1982; 1991; 1996) restringe a análise das relações aditivas a seis relações ternárias[21] fundamentais, e deixa evidente tal restrição: "As relações aditivas são relações

---

[20] Several important concepts are involved in additive structures: cardinal, measure, state, transformation, comparison, difference, inversion and directed number are all essential in the conceptualizing process undertaken by students (VERGNAUD, 1988b, p. 8).

[21] "Relaciones ternarias: relacionan tres elementos entre si" (VERGNAUD, 1991, p. 16).

ternárias que podem encadear-se de diversas maneiras e oferecem uma grande variedade de Estruturas Aditivas [...]" (VERGNAUD, 1991, p. 164, tradução nossa)[22].

Compreendo que as seis categorias apresentadas pelo autor estão baseadas na relação entre três elementos – que podem ser estados, transformações ou relações – que se entrelaçam de maneira a gerar a estrutura de situações-problema aditivas, tentaremos exemplificar, mais adiante, outras possibilidades de ir além das relações ternárias.

Segundo Vergnaud (1982, p. 39-42), a classificação em seis categorias também leva em conta considerações matemáticas e considerações psicológicas. A seguir, apresentamos algumas dessas considerações que ajudam a compreender a classificação trazida pelo autor para situações-problema aditivas.

- Considerações matemáticas: a existência de situações-problema que são resolvidas através da mesma operação numérica, porém apresentam estruturas bem diferentes. Essas situações geralmente são trabalhadas em sala de aula, sendo apenas consideradas como situações-problema de adição e, ou de subtração. Deixam de ser ponderados outros pontos como: conceitos, relações e propriedades inerentes à estrutura de cada uma delas. Vejamos um exemplo:

Situação 1: Marcos tem dois tipos de revistas em quadrinhos. Ele tem 11 revistas da turma da Mônica e 7 do Sítio. Quantas revistas em quadrinhos Marcos tem no total?

---

[22] "Las relaciones aditivas son relaciones ternarias que pueden encadenarse de diversas maneras y ofrecer una gran variedad de estructuras aditivas [...]" (VERGNAUD, 1991, p. 164).

Situação 2: Ontem Felipe tinha 11 figurinhas. Hoje ele ganhou 7 figurinhas de seu pai. Quantas figurinhas Felipe tem agora?

Nas duas situações, o estudante tem de fazer, no cálculo numérico, apenas uma adição, de 11+7= 18. Contudo, a estrutura da primeira situação envolve uma composição de dois diferentes tipos de revistas (duas partes) que formam o total de revistas de Marcos (o todo). Podem ser trabalhados conceitos como juntar, compor, medida de um conjunto, adição.

A estrutura da segunda situação envolve uma mudança na quantidade de figurinhas. Felipe tinha inicialmente uma quantidade de figurinhas (estado inicial), foram acrescentadas algumas (transformação), e agora ele tem outra quantidade (estado final). Podem ser trabalhados conceitos como transformar, estado, medida de um estado, adição.

Observa-se que diferentes conceitos podem ser trabalhados além da operação de adição. Além disso, para interpretar e resolver tais situações o estudante precisa compreender alguns desses conceitos.

- Considerações psicológicas: essas estão atreladas às relações de pensamento, e são mobilizadas por estudantes para compreender e resolver uma dada situação-problema. Pelo que foi colocado por Vergnaud (1996, p. 172), podemos dizer que tais considerações perpassam pela distância existente entre as diversas e diferentes mudanças que ocorrem no domínio cognitivo, do indivíduo, nas categorias das situações aditivas. Tais mudanças são notadas ao longo do seu desenvolvimento enquanto ser, sendo expressas em sua procura pelo êxito na resolução de tais situações. Também existem considerações psicológicas reveladas nas mu-

danças dos procedimentos de resolução e na acessibilidade da simbolização matemática utilizada para a resolução, todas decorrentes da distância ontogenética.

A partir dessas considerações, acreditamos que fique mais fácil entender as seis categorias básicas colocadas por Vergnaud (1982; 1991; 1996) para as situações-problema do Campo Conceitual Aditivo, e as interpretações feitas por Magina et al. (2001) a partir do que o autor coloca.

Na sequência, apresentamos as categorias definidas por Vergnaud (1982; 1991; 1996), seguidas das contribuições de Magina et al. (2001), e, por fim, apresentamos a releitura feita por nós para a classificação elaborada por Vergnaud.

1.2.3 As seis categorias de relações das Estruturas Aditivas, segundo Vergnaud

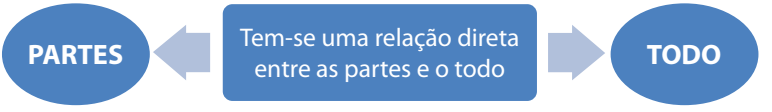
Como colocamos anteriormente, a classificação apresentada por Vergnaud (1982; 1991; 1996) é baseada em relações ternárias. Seguindo essa concepção, o autor as nomeou da seguinte maneira: composição; transformação; comparação; composição de duas transformações; transformação de uma relação; e composição de duas relações.

A seguir, buscamos elucidar as ideias do autor sobre cada uma das seis categorias. Também usamos desenhos esquemáticos para ilustrar os elementos de cada uma das categorias. Ressalvamos que tais desenhos são apenas ilustrativos e não se constituem em diagramas de resolução.

1 - Composição: nessa categoria, estão inclusas as situações-problema que têm, em sua estrutura, duas partes

que compõem um todo. Dessa forma, é possível relacionar as partes e o todo, ou seja, podem ser apresentados aos estudantes os valores de duas partes e perguntar sobre o valor do todo. Alternativamente pode-se informar o valor do todo e de uma das partes e perguntar sobre o valor da parte restante.

Elementos que compõem a estrutura das situações de composição:



(As situações 5 e 6 são exemplos da categoria composição).

Situação 5: Bete ganhou R$ 5,00 de sua mãe e R$ 6,00 de seu pai para ir brincar no parque. Com quantos reais Bete foi brincar no parque?

Nessa situação, são conhecidas as partes e se procura o todo. Tem-se:

Parte	Parte	Todo
R$ 5,00	R$ 6,00	? valor total

cada coluna representa um dos elementos da relação ternária: parte; parte; e todo.

Situação 6: Márcio tem 13 brinquedos, sendo carrinhos e jogos. Sete são jogos. Quantos são os carrinhos?

Na situação 6, são conhecidos uma das partes e o todo, e se procura a outra parte. Tem-se:

Parte	Parte	Todo
7 carrinhos	? jogos	13 brinquedos

e cada coluna representa um dos elementos da relação ternária: parte; parte; e todo.

2 - Transformação: nessa categoria estão inclusas todas as situações-problema que possuem, em sua estrutura, um estado inicial e uma transformação que levam a um estado final.

Situação 7: Carmem tinha 15 pirulitos. Deu 3 desses pirulitos para o seu primo. Com quantos pirulitos Carmem ficou?

Nesta situação, são conhecidos o estado inicial, a transformação, e se procura o estado final. Ocorre uma transformação negativa sobre o estado inicial. Tem-se:

Estado inicial	Transformação (negativa)	Estado final
15 pirulitos	-3 pirulitos	? pirulitos

cada coluna representa um dos elementos da relação ternária: estado inicial; transformação; e estado final. Pode haver situação com essa mesma estrutura (na qual se busca o estado final) e a transformação ser positiva.

Situação 8: Bianca tinha 8 livros de histórias infantis em seu armário. Ela ganhou alguns da prima. Depois

Bianca contou seus livros e viu que ficou com 15. Quantos livros ela ganhou da prima?

Na situação acima, são dados o estado inicial, o estado final, e se procura a transformação. Ocorre uma transformação positiva sobre o estado inicial. Tem-se:

Estado inicial	Transformação (positiva)	Estado final
8 livros	? livros	15 livros

cada coluna representa um dos elementos da relação ternária: estado inicial; transformação; e estado final. Pode haver situação com essa mesma estrutura (na qual se busca a transformação) e a transformação ser negativa.

Situação 9: Rita tinha algumas revistas em quadrinhos. Sua madrinha deu 6 revistas para ela. Rita ficou com 19 revistas em quadrinhos. Quantas revistas em quadrinhos Rita tinha antes?

A situação acima traz a transformação e o estado final, e se procura o estado inicial. Ocorre uma transformação positiva sobre o estado inicial. Tem-se:

Estado inicial	Transformação (positiva)	Estado final
? revistas	6 revistas	19 revistas

cada coluna representa um dos elementos da relação ternária: estado inicial; transformação; e estado final. Pode haver situação com essa mesma estrutura (na qual se busca o estado inicial) e a transformação ser negativa.

Conforme os exemplos das situações 7, 8 e 9, na categoria transformação, pode-se buscar o estado inicial,

a transformação ou o estado final. Por outro lado, a transformação pode ser positiva ou negativa e, assim, pode-se ter um total de seis tipos diferentes de situação-problema na categoria transformação, sendo dois para cada elemento da relação ternária.

3 - Comparação: nessa categoria, é possível relacionar duas quantidades comparando-as, denominadas por Vergnaud (1991; 1996) de medida; relação; e medida, ou seja, temos uma relação que liga duas medidas.

Elementos que compõem a estrutura das situações-problema de comparação:

Situação 10: Cláudio tem R$ 9,00 e Vinícius tem R$ 5,00 a mais que ele. Quantos reais tem Vinícius?

Nessa situação-problema, é dada uma medida, uma relação, e se procura a outra medida. Existe uma relação positiva entre as duas medidas. Tem-se:

Medida	Relação (positiva)	Medida
Cláudio, R$ 9,00	+R$ 5,00	Vinícius ? reais

cada coluna representa um dos elementos da relação ternária: medida; relação; e medida. Pode haver situação com essa mesma estrutura (na qual se busca uma das medidas) e a relação ser negativa.

Situação 11: Heitor e José ganharam dinheiro de seus padrinhos. Heitor ganhou R$ 14,00 e José ganhou R$ 23,00. Quem ganhou menos reais? Quantos reais a menos?

Na situação-problema, são dadas as duas medidas e se procura a relação. Existe uma relação negativa entre as medidas. Tem-se:

Medida	Relação (negativa)	Medida
R$ 23,00 de José	-? Reais	R$ 14,00 de Heitor

cada coluna representa um dos elementos da relação ternária: medida; relação; e medida, e a relação é negativa. Pode haver situação com essa mesma estrutura (onde se busca a relação) e a relação ser positiva.

Situação 12: Taís tem dinheiro para comprar seu lanche. E Vera tem R$ 4,00 a mais que Taís. Sabendo que Vera tem R$ 9,00, quantos reais tem Taís?

A situação-problema 12 traz uma medida e a relação, e se procura a outra medida. A diferença entre a situação 10 e a 12 é que, nessa última, se busca o valor da medida que é tomada como referência, isto é, a partir dela é que se determina o valor da outra medida, ao contrário da situação 10, em que se buscava o valor da medida referida. Na situação 12, tem-se:

Medida	Relação (positiva)	Medida
Reais? Taís	+ R$ 4,00	R$ 9,00 de Vera

cada coluna representa um dos elementos da relação ternária: medida; relação; e medida, e a relação é positiva.

Pode haver situação com essa mesma estrutura (onde se busca a relação) e a relação ser negativa.

Conforme os exemplos das situações 10, 11 e 12, na categoria comparação, pode-se buscar a medida de referência, a relação ou a medida referida. Por outro lado, a relação pode ser positiva ou negativa e assim pode-se ter um total de seis tipos diferentes de situação-problema na categoria comparação, sendo dois para cada elemento da relação ternária.

Existe uma diferença básica entre as duas últimas categorias (transformação e comparação); Vergnaud (1982) coloca um motivo para diferenciar as duas categorias: "Encontrei a necessidade de distinguir a categoria transformação da categoria comparação, para destacar a diferença entre transformações dinâmicas e relações estáticas" (VERGNAUD, 1982, p. 43, tradução nossa)[23].

Pelas colocações do autor, é possível destacar que, na transformação, o que relaciona o estado inicial com o final é uma **transformação dinâmica**. Essa é chamada de dinâmica pela sua natureza de proporcionar uma mudança de estado, um movimento. Na comparação, existe uma relação entre as medidas (referência e referida), e esta é uma **relação estática**[24], ou seja, já se encontra estabelecida.

A seguir, as três últimas categorias apresentadas por Vergnaud (1982).

---

[23] I have found it necessary to distinguish this category from Category II to highlight the difference between dynamic transformations and static relationships (VERGNAUD, 1982, p. 43).

[24] Na seção seguinte, definimos com mais detalhes as transformações dinâmicas e as relações estáticas.

4 - Composição de duas transformações: nesta categoria, são dadas duas transformações e se busca uma terceira (transformação – transformação – transformação), que será determinada através de uma composição. Vergnaud (1991, p. 167, tradução nossa) diz que "[...] duas transformações se compõem para dar lugar a uma transformação"[25]. Segue um exemplo que ilustra essa colocação:

Situação 13: João tem bolas de gude. E ganhou 5 bolas de seu amigo. João resolveu dar 3 bolas de gude para seu primo. Em quantas bolas aumentou a quantidade de gudes de João?

São duas transformações, uma positiva e a outra negativa, e se procura uma terceira, que é resultado direto da composição feita entre as duas que foram dadas. Tem-se:

Transformação 1 (positiva)	Transformação 2 (negativa)	Composição das transformações
Ganhou 5	Deu 3	Aumentou?

cada coluna representa um dos elementos da relação ternária: transformação; transformação; e transformação. Pode haver situação com essa mesma estrutura e as transformações variarem entre serem positivas ou serem negativas.

Para definir as duas últimas categorias de situações aditivas, fizemos uma detalhada comparação entre as

[25] "[...] dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación" (VERGNAUD 1991, p. 167).

diferentes nomenclaturas adotadas pelo autor em três diferentes publicações. O Quadro 1.2.1 abaixo mostra as referidas nomenclaturas com suas respectivas fontes.

Publi-cação	Nomenclatura da categoria 5	Nomenclatura da categoria 6
Vergnaud, 1982, p. 44-45	Uma transformação liga duas relações estáticas	Composição de duas relações estáticas
Vergnaud, 1991, p. 164	Uma transformação opera sobre uma relação para dar lugar a um estado relativo	Dois estados relativos (relações) se compõem para dar lugar a um estado relativo
Vergnaud, 1996, p. 172	Transformação de uma relação	Composição de duas relações

Quadro 1.2.1 - As diferentes nomenclaturas usadas por Vergnaud para as duas últimas categorias.

Das nomenclaturas apresentadas no Quadro 1.2.1, adotamos as colocadas na publicação de 1996, por entender que ambas apresentam uma nomenclatura mais simples e, ao mesmo tempo, mais condizente com as reais relações envolvidas na estrutura das situações que se classificam dentro da respectiva categoria.

5 - Transformação de uma relação: nesta categoria, é dada uma relação estática e uma transformação, e se busca outra relação que é gerada quando a transformação dada opera sobre a relação estática dada (relação – transformação – relação).

Situação 15: Rafael devia 11 gudes a Pedro. Ele pagou 5 gudes a Pedro. Quantas gudes Rafael ainda deve a Pedro?

Na situação-problema, são dadas uma relação estática negativa e uma transformação positiva. Através da transformação dada, busca-se uma nova relação estática. Tem-se:

Relação estática (negativa)	Transformação (positiva)	Relação estática
Devia 11	Pagou 5	Ficou devendo?

cada coluna representa um dos elementos da relação ternária: relação; transformação; e relação. Pode haver situação com essa mesma estrutura (onde se busca a relação) e variarem a relação e a transformação dada da seguinte forma: relação negativa com transformação negativa; relação positiva com transformação positiva; relação positiva com transformação negativa.

6 - Composição de duas relações: Para esta categoria, Vergnaud (1991, p. 168) coloca que: "[...] duas relações estáticas se compõem para dar lugar a outra relação estática"[26]. Nessa categoria, são dadas duas relações estáticas e se busca uma terceira, que será gerada pela composição dessas duas.

Situação 16: João deve 7 figurinhas a Rodrigo, porém Rodrigo lhe deve 3. Então, quantas figurinhas João realmente deve a Rodrigo?

Na situação-problema acima, tem-se:

[26] "[...] dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo" (VERGNAUD, 1991, p. 168).

Relação estática	Relação estática	Relação estática
Deve 7	De haver 3	Deve ?

cada coluna representa um dos elementos da relação ternária: relação; relação; e relação. Pode haver situação com essa mesma estrutura e que variem as relações estáticas dadas entre positivas e, ou negativas.

1.2.4 Transformações e relações estáticas

O conjunto dos números naturais é o primeiro com o qual o estudante tem contato na escola.

$N = \{0, 1, 2, 3, 4,..., n,...\}$

Contudo, desde a Educação Infantil, são trabalhadas situações-problema aditivas e estas compreendem, como vimos na seção anterior, vários tipos de relações aditivas com adição e subtração. Estas acabam envolvendo elementos que são representados através dos números inteiros.

$Z = \{..., -n,..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,..., n,...\}$

Os estudantes acabam lidando com os números inteiros, mesmo antes da escola, por isso é possível pensar em introduzir os conceitos que envolvem esse conjunto desde as séries iniciais. Vergnaud (1982) coloca que: "[...] deste modo, existe uma discrepância entre a estrutura dos problemas que são apresentados às crianças e os conceitos que lhes são ensinados" (VERGNAUD,

1982, p. 46, tradução nossa)[27].

Baseado nessa afirmação, Vergnaud (1982; 1991) faz uma distinção entre os números envolvidos nas medidas, nas relações estáticas e nas transformações. Um outro ponto a ser observado é que esse autor chama o conjunto dos números inteiros de conjunto dos números relativos, visto que os naturais também são inteiros. Desse ponto em diante, chamaremos o conjunto *Z* de conjunto dos números relativos.

Para Vergnaud (1991), os números naturais são números sem sinal. Não são nem positivos nem negativos. Dessa forma, para a Teoria dos Campos Conceituais, as transformações e as relações não podem ser representadas pelos números naturais, pois as transformações e as relações ou são positivas ou são negativas. E as medidas são representadas pelos números naturais, que são números que não são carregados de sinal.

1.2.5 As categorias de relações das Estruturas Aditivas segundo Magina et al. (2001)

Magina et al. (2001) apresentam aspectos da Teoria dos Campos Conceituais oferecendo um quadro teórico que permite compreender como os estudantes dominam o Campo Conceitual Aditivo.

Na parte dois do livro, as autoras trazem uma discussão sobre as Estruturas Aditivas, e nela apresentam

[27] "[...] thus, there is a discrepancy between the structures of problems that children meet and the mathematical concepts that they are taught" (VERGNAUD, 1982, p. 46).

uma classificação para as situações-problema. As autoras colocam: "Na estrutura aditiva encontramos três grupos básicos de problema que, segundo suas características, podem ser classificados como: composição, transformação e comparação" (MAGINA et al., 2001, p. 25).

Por essa afirmativa é possível verificar que os três grupos básicos de situações-problema elencados pelas autoras são as três primeiras categorias apresentadas por Vergnaud (1982; 1991; 1996). E as definições dadas para cada uma delas não diferem das ideias de Vergnaud (1982; 1991; 1996).

Na sequência, as autoras se referem à existência de situações-problema que envolvem vários tipos de raciocínio e os classificam como "problemas mistos", afirmando que:

> Até então, apresentamos problemas com ordem de complexidade de raciocínio distinta, mas trabalhando apenas um único raciocínio. Agora vamos trabalhar com problemas que envolvem dois raciocínios aditivos simultaneamente. Chamaremos esses problemas de "problemas mistos", [...] não temos a pretensão de esgotar todas as combinações possíveis que envolvem os três raciocínios aditivos: composição, transformação e comparação (MAGINA et al., 2001, p. 52).

Observe que as autoras definem os "problemas mistos" como uma combinação dos três grupos básicos apresentados inicialmente, que são as três primeiras categorias apresentadas por Vergnaud (1982; 1991; 1996).

Magina et al. (2001) não se referem à ideia de relação ternária que baseia a classificação na Teoria dos Campos Conceituais e também não esgotam as possibilidades de geração de combinações com os três raciocínios aditivos

(composição, transformação e comparação). Para concluir, as autoras apresentam três tipos de "problemas mistos": composição de transformações; transformação de composição; e comparação com composição de transformação.

1.2.6 As categorias de relações das Estruturas Aditivas segundo a releitura de Santana

Para o trabalho da sua tese, Santana (2010) aportou-se nas definições e classificações apresentadas por Vergnaud (1982; 1991; 1996) e em Magina et al. (2001) para determinar as categorias de situações a serem adotadas para o trabalhar com os estudantes.

Santana (2010) chama de relações aditivas as relações n-nárias[28] que podem relacionar n elementos dentro das Estruturas Aditivas, tomando como base os seis esquemas ternários fundamentais, apresentados na Teoria dos Campos Conceituais, para assumir a forma que conceitua categorias.

A autora considera que apenas amplia as possibilidades de relações dentro de cada situação-problema e, consequentemente, dentro de cada categoria, mas os raciocínios básicos definidos por Vergnaud (1982; 1991; 1996) foram conservados. A seguir, listamos cada uma das categorias segundo Santana (2010).

Composição: são situações nas quais se tem as partes e um todo.

[28] N-nárias são relações que vão além das relações ternárias. Pode-se ter uma relação entre três os mais elementos.

Situação 17: Na gaveta, tem 6 balas de chocolate, 3 de hortelã e 4 de morango. Quantas balas tem na gaveta?

Transformação: são situações que têm um estado inicial, uma transformação e um estado final.

Situação 18: "Maria tinha R$ 12,00 e comprou uma boneca por R$ 4,00. Com quantos reais Maria ficou?

Comparação: são situações nas quais é estabelecida uma relação entre duas quantidades, uma denominada de referente e a outra de referido.

Situação 19: "Carlos tem 5 anos. Taís tem 7 anos a mais que ele. Quantos anos tem Taís?

Composição de várias transformações: são situações nas quais são dadas transformações e se busca uma nova transformação a partir da composição das transformações dadas.

Situação 20: José tem livros de histórias infantis. Ele ganhou 5 livros de seu pai, e 4 livros de sua tia. José resolveu dar 3 dos seus livros mais velhos para seu amigo Jonas. Descontando os livros que José deu, em quanto aumentou a quantidade de livros de José?

Transformação de uma relação: são situações nas quais é dada uma relação estática, e se busca uma nova, que é gerada a partir da transformação da relação estática dada.

Situação 21: Saulo devia R$ 8,00 a Glebson, pagou R$ 5,00. Quanto ele deve agora?"

Composição de relações estáticas: duas ou mais relações estáticas se compõem para dar lugar a outra relação estática.

Situação 22: Ana deve 4 figurinhas a Bete, 3 a Cris e 6 a Mara. Quantas figurinhas Ana deve ao todo?

Situação 23: Pedro deve 7 figurinhas a Roberta e 4 a Mônica. E Roberta deve 3 a Pedro. Então, quantas figurinhas Pedro deve no total?

1.2.7 As extensões das três primeiras categorias

Uma das grandes contribuições dos estudos de Magina et al. (2001) foi a apresentação da subdivisão das três primeiras categorias determinadas por Vergnaud (1982; 1991; 1996) (composição, transformação e comparação) em subcategorias que são: protótipos e extensões. Esses são determinados conforme os conceitos aditivos que estejam abordando.

Protótipos: são situações de menor complexidade e podem ser de composição quando são dadas as partes e se pede o todo, ou de transformação, quando são dados o estado inicial e a transformação, e se pede o estado final. Segundo Magina et al (2001), são situações em que a maior parte das crianças, antes de entrar nas séries iniciais do Ensino Fundamental, tem facilidade para resolver.

Exemplo de composição protótipo:

Situação 24: No cesto tem bolas vermelhas e bolas azuis. Cinco são vermelhas e 4 são azuis. Quantas bolas tem, no cesto, no total?

Exemplo de transformação protótipo.

Situação 25: Bia tinha R$ 12,00 em sua carteira. Deu R$ 5,00 a Letícia. Com quantos reais Bia ficou?

Para a classificação em extensões, as autoras colocam: "[...] as extensões não tratam de níveis de desenvolvimento estanques a serem alcançados, mas, sim, de um conjunto de situações-problema que possibilitarão à criança ampliar sua representação sobre essas estruturas" (MAGINA et al., 2001, p. 33). Segundo as autoras, as extensões

são estabelecidas seguindo o percurso de apropriação do conceito feito pela criança (MAGINA et al., 2001). Nos resultados apresentados pelas autoras, em Campos et al. (2007) e Santana et al. (2008), tem-se que as dificuldades dos estudantes aumentam à medida que o percurso das extensões vai aumentando, ou seja, nas extensões menores, os estudantes obtêm melhores desempenhos e, nas maiores, piores desempenhos.

As situações de 1ª extensão podem ser de composição, quando são dados uma parte (ou mais) e o todo, e se busca outra parte; ou de transformação, quando são dados o estado inicial e o final, e se pede a transformação.

Exemplo de composição de 1ª extensão.

Situação 26: João tem uma coleção de 35 carrinhos guardados em três caixas. Na primeira caixa, ele colocou 12 carrinhos. Na segunda, ele colocou 10. Quantos carrinhos ele colocou na terceira caixa?

Exemplo de transformação de 1ª extensão.

Situação 27: Pedro tinha 6 bolas de gude. Ganhou algumas e agora ele tem 13 bolas de gude. Quantas bolas ele ganhou?

As situações de 2ª e 3ª extensão são apenas da categoria comparação. De 2ª quando são dados o referente[29] e a relação, e se busca o referido.

Exemplo de comparação de 2ª extensão.

---

[29] Referente e referido são termos usados por Magina et al. (2001) para identificar as medidas da categoria comparação. Estamos definindo-as como: referente, a medida tomada como referência, isto é, a partir dela é que se determina o valor da outra medida; referido, a medida referida, aquela que depende da referência.

Situação 28: Ana tem 8 anos e Carlos tem 2 anos a mais que ela. Quantos anos tem Carlos?

Na 3ª extensão, são dados o valor do referente e do referido, e se busca a relação entre eles.

Exemplo de comparação de 3ª extensão.

Situação 29: Ana tem 8 anos. Carlos tem 10 anos. Quem tem mais anos? Quantos anos a mais?

As situações de 4ª extensão podem ser de comparação, quando são dados o referido e a relação, e se busca o referente, ou de transformação, quando são dados a transformação e o estado final, e se busca o estado inicial.

Exemplo de comparação de 4ª extensão.

Situação 30: João e Luara têm balas. João tem 8 balas a mais que Luara. Se João tem 15 balas, quantas balas tem Luara?

Exemplo de transformação de 4ª extensão.

Situação 31: Marcos tinha algumas bolas de gude e ganhou 5 bolas de gude de sua tia. Ele ficou com 12 bolas de gude. Quantas bolas de gude Marcos tinha antes?

1.2.8 Os diagramas de Vergnaud

O uso de equações matemáticas para trabalhar essas relações, muitas vezes, torna-se inadequado para a faixa etária dos estudantes do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental; dessa forma, Vergnaud (1982; 1991) explica o quadro de diagramas utilizado em sua Teoria para desenvolver o cálculo relacional e, consequentemente, facilitar a compreensão das situações-problema trabalhadas. Esse quadro de diagramas é também denominado diagramas de Vergnaud.

O Quadro 1.2.2 traz a ilustração dos símbolos utilizados por Vergnaud em seus diagramas. A construção desse quadro foi baseada nas explicações oferecidas por Vergnaud (1991, p. 165).

Esquemas	Símbolo	Significado
Retângulo	▭	Um número natural.
Círculo	○	Um número relativo.
Chave vertical ou horizontal	} ⏟	A composição de elementos de uma mesma natureza.
Seta vertical ou horizontal	↑ →	Uma transformação ou uma relação; deve-se dizer a composição de elementos de naturezas diferentes.

Quadro 1.2.2 - Símbolos utilizados por Vergnaud em seus diagramas.

Observe que a construção dos diagramas se fundamenta em chaves, setas e figuras geométricas simples. Os estudantes podem desenhá-las facilmente. Contudo, faz-se necessário ter atenção em relação à função de cada um desses símbolos.

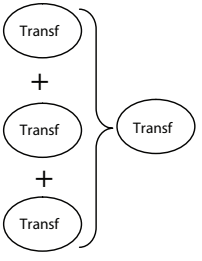
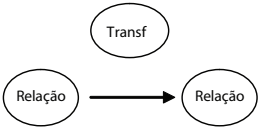
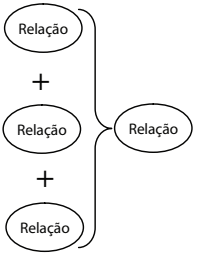
Baseada nas explicações de Vergnaud (1991), podemos afirmar que o retângulo indica uma medida estática; o círculo indica uma medida dinâmica representando uma mudança, transformação ou relações; as chaves indicam que se está compondo elementos de uma mesma natureza, por exemplo, composição de medidas ou composição de transformações; por fim, as setas indicam que está ocorrendo uma mudança, uma transformação ou uma relação.

No Quadro 1.2.3 abaixo, apresentamos as três primeiras categorias de situações-problema aditivas colocadas por Vergnaud (1982; 1991; 1996) e por Magina et al. (2001) com as suas respectivas extensões. Para cada extensão, colocamos o seu respectivo diagrama, com o objetivo de esclarecer melhor o raciocínio, ou seja, o cálculo relacional envolvido em cada uma delas.

TIPOS DE SITUAÇÕES-PROBLEMA			
	Composição	**Transformação**	**Comparação**
Protótipo	Parte 1 + Parte 2 } ? Todo desconhecido	Estado inicial —(+Transf)→ ? Estado inicial —(-Transf)→ ? Estado final desconhecido Subtração/Adição	
1ª extensão	Parte 1 + ? } TODO Uma parte desconhecida	Estado inicial —(±?, F < I ou F > I)→ Estado final Transformação desconhecida Subtração/Adição	
2ª extensão			? Referido ↑ X Relação A Referente Referido desconhecido
3ª extensão			B Referido ↑ ? Relação A Referente Relação desconhecida
4ª extensão		? —(± Transf.)→ Estado final T^{-1} Estado inicial desconhecido	B Referido ↑ X Relação ? Referente Referente desconhecido

Quadro 1.2.3 - Classificação das situações-problema das Estruturas Aditivas.
Fonte: Campos et al., 2007

O Quadro 1.2.4, a seguir, apresenta o diagrama das três últimas categorias.

Composição de várias transformações	Transformação de uma relação	Composição de relações estáticas
		

Quadro 1.2.4 - Diagrama das três últimas categorias de situações-problema das Estruturas Aditivas.

A construção dos diagramas que compõem o Quadro 1.2.4 está baseada em Vergnaud (1982; 1991), sendo inserida a releitura de Santana (2010).

2 O CONTEXTO DO ENSINO DO CAMPO ADITIVO COM O USO DO MATERIAL DIDÁTICO

Neste capítulo, abordamos alguns pontos importantes sobre o uso do material didático no ensino de Matemática e apresentamos o material didático usado no estudo.

2.1 O MATERIAL DIDÁTICO

Concebemos como material didático um instrumento que possa facilitar o trabalho do professor em sala de aula. Nessa perspectiva, Lorenzato (2006, p. 18) define material didático como "qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem". Dentre esses materiais, podemos citar: o papel, o lápis, o giz, a calculadora, o computador, jogos, tampinhas, ábaco, material dourado, barras de Cuisenaire, quadro de valor e lugar. Na sequência, discutimos o uso de material didático em sala de aula e apresentamos os materiais didáticos utilizados no estudo.

2.1.1 O uso de material didático no ensino da Matemática

Diante das necessidades e das dificuldades encontradas na aprendizagem de conceitos matemáticos, faz-se necessário adaptar metodologias de forma a atender melhor ao processo de aprendizagem que é próprio de cada indivíduo. Assim, materiais de fácil acesso ou fácil aquisição são opções para que o professor possa diversificar a sua metodologia de ensino.

Alguns cuidados, no entanto, precisam ser tomados pelo professor no sentido de evitar uso incorreto ou resultados indesejados ao usar o material. Nesse sentido, o trabalho com o material didático precisa ser planejado de maneira que possa subsidiar a formação de conceitos abstratos. Bittar e Freitas (2005, p. 29) exemplificam essa preocupação: "ao usar um material para que o aluno apreenda o conceito de sistema de base dez, à medida que são efetuadas trocas com o material deve-se representar essas trocas em linguagem matemática."

Um exemplo da importância do uso de diferentes materiais didáticos com o foco na aprendizagem foi o trabalho desenvolvido por Selva (2005), com crianças da Educação Infantil e do 1º ciclo do Ensino Fundamental, abordando "Resolução de problemas de divisão: estratégias X recursos utilizados", que tinha, dentre seus principais objetivos, verificar se a persistência do uso de materiais concretos dificulta a elaboração de estratégias mais sofisticadas. A autora coloca dentre as suas conclusões finais:

> Devemos concluir que é importante que o educador estimule e dê espaço para que diferentes tipos de re-

> cursos (objeto concreto, papel e lápis, cálculo mental) sejam utilizados em sala de aula, explorando-se ao máximo as estratégias desenvolvidas pelos alunos (SELVA, 2005, p. 7).

Segundo os resultados desta pesquisa, atividades que utilizam materiais didáticos, muitas vezes, são importantes para fomentar o desenvolvimento da habilidade de pensar matematicamente, o que é, incontestavelmente, uma habilidade fundamental em nossa cultura.

Enfatizamos que a ideia fundamental de uso do material didático é que: esse uso seja reflexivo; o estudante seja confrontado com situações de forma que não seja atraído apenas pelo uso do material, mas também pelas operações e pelos conceitos envolvidos e objetivados para serem trabalhados; e o professor conheça os materiais e suas potencialidades.

Piaget e Szeminska (1975) investigaram como os sistemas sensório-motores se organizam no plano do pensamento em sistemas operatórios e a rede de operações que engendram o número. Os autores organizaram seu trabalho em três grandes partes: a conservação das quantidades e a invariância dos conjuntos, a correspondência termo a termo cardinal e ordinal, e as composições aditivas e multiplicativas. Em todas essas três partes, fazem uso de material didático manipulável para efetivar as atividades (experimentos) e, nessa investigação, eles deixam evidente a necessidade de uma manipulação, como uma indicação essencial para um contato com os dados da inteligência sensório-motora[1].

---

[1] Segundo Piaget (1975, p. 334, 335), a inteligência sensório-motora "[...] precede o aparecimento da linguagem [...] se limita a querer o

Nesse sentido é que utilizamos materiais didáticos buscando desenvolver o Campo Conceitual Aditivo de estudantes da 3ª série do Ensino Fundamental. Pensamos não apenas no atrativo que o material poderia despertar nos estudantes, mas nas habilidades matemáticas que poderiam ser mobilizadas e compreendidas por eles.

Na sequência, apresentamos o material didático usado.

2.1.2 O material didático usado no estudo

O uso de determinado material didático sempre será um dentre vários fatores que podem intervir no desempenho do estudante. E muitos são os materiais didáticos que podem ser usados no ensino dos conceitos inerentes ao Campo Conceitual Aditivo. Destarte, fizemos alguns questionamentos antes de selecionar o material a ser usado, dentre os quais podemos citar: qual seria o objetivo principal ao usar o material didático? De que maneira esse material seria utilizado pelo estudante durante a intervenção de ensino? Quais diferenças existiriam entre o uso de um material e outro?

Assim, elencamos, como objetivos principais, que os materiais escolhidos fossem capazes de proporcionar um aprendizado do cálculo numérico, propiciando a realização de trocas e agrupamentos pertinentes às operações de adição e de subtração; e permitir a compreensão do cálculo relacional envolvido na situação-problema.

êxito ou a adaptação prática, ao passo que o pensamento verbal ou conceitual tem por função conhecer e enunciar as verdades."

Dessa forma, selecionamos o material dourado e o ábaco de copinhos para serem utilizados no desenvolvimento das intervenções de ensino. A seguir, apresentamos as peculiaridades de cada um desses materiais.

2.1.2.1 O material dourado

O material dourado ou Montessori é um material didático concreto e manipulável. Pode ser confeccionado em madeira (forma em que é comercializado), ou com outros materiais: cartolina; folhas de emborrachado ou material similar.

No aspecto espacial, é um material constituído de:

- cubos pequenos, medindo 1 cm de aresta;
- barras em forma de paralelepípedo, medindo 1cm x 1cm x 10cm;
- placas em forma de paralelepípedo, medindo 1cm x 10cm x 10cm;
- blocos em forma de cubos maiores, medindo 10cm de aresta.

Os cubos pequenos representam as unidades; as barras são formadas por dez cubos, ou seja, representam a dezena; as placas são formadas por dez barras, ou seja, representam a centena; e os cubos maiores são formados por dez placas, ou seja, representam o milhar.

Antes de iniciar o trabalho com esse material, o estudante precisa receber, antecipadamente, algumas instruções, como, por exemplo, identificar o valor de cada peça, os agrupamentos e as trocas que podem ser realizadas.

Segundo Bittar e Freitas (2005, p. 238), o material dourado "é adequado para introdução das operações de adição e subtração, para auxiliar a compreensão dos agrupamentos, trocas e mudanças de posição, em particular para explicar o 'vai um' e o 'empresta um'." Por essas razões, o uso do material dourado aborda o cálculo numérico.

Tomamos alguns cuidados, todavia, ao abordar a interpretação da situação-problema e permear o cálculo relacional. Ao realizar explicações e correções, incentivávamos os estudantes a separar as quantidades apresentadas na situação. Somente depois de estabelecer as devidas interpretações, é que conduzíamos os agrupamentos e as trocas referentes às operações necessárias.

Para este estudo, selecionamos dois modelos de material dourado para serem trabalhados na sala de aula. Um foi manipulado pelo estudante e o outro foi manipulado pela pesquisadora. O material do estudante é feito de madeira (ver a Figura 2.1.1), e o da pesquisadora é feito com folhas de emborrachado (ver a Figura 2.1.2), tendo um ímã, no fundo, que possibilita fixar numa placa de zinco, sendo possível sua visualização por todos os estudantes na sala de aula.

A Figura 2.1.1 mostra, na imagem da esquerda, o material dourado na caixa em que é comercializado e, na imagem da direita, as caixinhas plásticas com as quantidades que foram distribuídas para os estudantes. A Figura 2.1.2 mostra o material dourado que foi confeccionado pela pesquisadora e utilizado para as explicações e correções durante a intervenção. Na imagem, tem-se o registro do número 125 na placa de zinco.

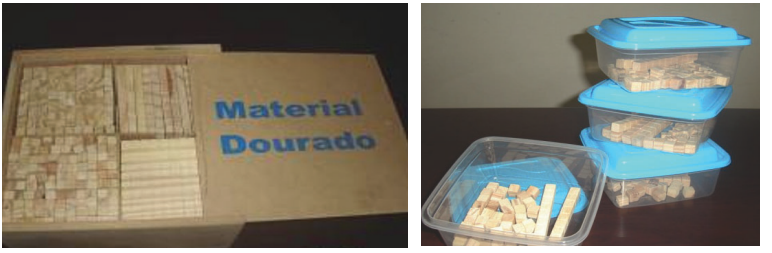


Figura 2.1.1 - Material dourado numa caixa completa e nas caixinhas que foram distribuídas para cada estudante.

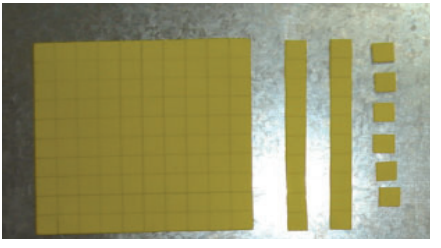


Figura 2.1.2 - Parte do material dourado que foi usado pela pesquisadora, com o registro do número 125.

2.1.2.2 O ábaco de copinhos

O ábaco de copinhos é um material desenvolvido através de nossos trabalhos com professores do curso de formação em serviço – Proação, e é uma adaptação do ábaco de palitos, também conhecido como ábaco de pinos.

A versão do ábaco de copinhos pode ser confeccionada numa superfície plana (tábua de madeira, tampa de caixa de sapatos, dentre outras), na qual são colados copinhos descartáveis que vão representar as ordens e, ou classes (unidade, dezena, centena ...). Para trabalhar as operações, o estudante manipula canudos de altura proporcional à altura dos copos descartáveis utilizados.

Ele, o ábaco, serve para representar números do sistema de numeração decimal, compreender os valores posicionais dos algarismos, bem como a visualização dos agrupamentos e das trocas para ilustrar a efetuação das operações de adição e subtração. Esses procedimentos facilitam a compreensão do cálculo numérico. Durante a intervenção, o trabalho com o cálculo relacional foi desenvolvido de maneira similar ao uso do material dourado.

A Figura 2.1.3 traz a imagem do ábaco de copinhos, que foi utilizado pela pesquisadora. Cada estudante confeccionou o seu próprio ábaco, seguindo as orientações da pesquisadora. Para isso, foram utilizados caixa de papelão pequena e copinhos descartáveis.

Figura 2.1.3 - Ábaco de copinhos usado pela pesquisadora.

Os ábacos de cada estudante eram do mesmo tamanho e formato que o usado pela pesquisadora, conforme o apresentado na Figura 2.1.3. Foi utilizada apenas a classe das unidades simples usando a seguinte simbologia:

- U, que significa ordem da unidade simples;
- D, que significa ordem da dezena simples;
- C, que significa ordem da centena simples.

3 A EXPERIÊNCIA NA SALA DE AULA

Neste capítulo, fazemos uma breve descrição do estudo realizado que teve como objetivo aplicar e avaliar uma sequência de ensino baseada na resolução de situações-problema, desenvolvida em duas turmas da 3ª série do Ensino Fundamental, cada uma utilizando suporte didático distinto, a fim de analisar os possíveis efeitos e as expansões no Campo Conceitual Aditivo.

3.1 INTRODUÇÃO

A sequência de ensino foi elaborada tomando por base a Teoria dos Campos Conceituais, especificamente o Campo Aditivo. A sua aplicação se apoiou no uso de dois suportes didáticos, o material representacional que focou o cálculo relacional e o material didático que focou o cálculo numérico.

Estamos definindo *sequência de ensino* como um conjunto de situações elaboradas e dispostas de maneira que sejam abordados conceitos previamente selecionados para serem trabalhados; e *intervenção de ensino* como sendo a aplicação da sequência de ensino apoiada em um suporte didático.

No caso do presente estudo, os suportes didáticos são: diagramas de Vergnaud; ábaco de copinhos; e material dourado.

3.2 O ESTUDO

Foram envolvidos 98 estudantes que estavam cursando a 3ª série do Ensino Fundamental no ano letivo de 2008, numa escola pública municipal de uma cidade da região Sul da Bahia. Os estudantes faziam parte de quatro turmas, que foram divididas em dois grupos, denominados Grupo Experimental (GE) e Grupo de Controle (GC).

- O Grupo Experimental, composto de duas turmas, Grupo Material Didático (MD) e Grupo Diagramas de Vergnaud (DV), envolveu 46 estudantes. Os estudantes do MD tinham média de idade de 8,6 anos e o DV, de 9,1 anos;
- O Grupo de Controle foi composto por duas turmas, Grupo Controle Visto (CV) e Grupo Controle não Visto (CN), num total de 52 estudantes. A média de idade era de 11 anos para ambos os grupos.

A Figura 3.2.1 mostra como foi a divisão dos estudantes integrantes do estudo.

A intervenção de ensino foi aplicada pela Profa. Eurivalda Santana, no Grupo Experimental, e as professoras das turmas do Grupo de Controle trabalharam os mesmos objetos de pesquisa – situações-problema aditivas. Contudo, não foi utilizada a mesma sequência de ensino e não contaram com qualquer tipo de orientação por

parte da pesquisadora. Apenas foi garantido, durante o planejamento semanal das aulas, que seriam trabalhadas situações-problema aditivas no mesmo período da intervenção de ensino com o Grupo Experimental.

Figura 3.2.1 - Desenho esquemático dos grupos envolvidos no estudo.

No GC, aplicamos apenas os instrumentos diagnósticos. Os efeitos de maturação, do ensino e da aprendizagem sobre o desenvolvimento cognitivo foram considerados quando comparados os dois grupos, GC e GE.

No GE, além da aplicação dos instrumentos diagnósticos, ocorreu a aplicação do processo de intervenção e, buscando compreender alguns dos esquemas registrados pelos estudantes, cinco meses depois do pós-teste, foi aplicada uma atividade com situações-problema similares às que faziam parte dos instrumentos diagnósticos e das atividades de casa. Em seguida, foi realizada uma entrevista com cinco estudantes. Parte dessa entrevista foi utilizada na análise dos esquemas de resolução.

Em suma, a atividade desenvolvida durante a intervenção tornou os grupos distintos:

- no MD, foram aplicados os dois instrumentos diagnósticos (pré-teste e pós-teste): a sequência de ensino com a metodologia pautada no uso dos

diagramas de Vergnaud e uma atividade para uma entrevista com parte dos estudantes;

- no DV, foram aplicados os dois instrumentos diagnósticos, a sequência de ensino com a metodologia pautada no uso dos materiais didáticos e uma atividade para uma entrevista com parte dos estudantes;
- o CV não recebeu a intervenção de ensino feita pela pesquisadora. As aulas ministradas pela professora da turma, que tiveram como objeto de estudo os conceitos do Campo Conceitual Aditivo, foram observadas pela pesquisadora. E o grupo respondeu os instrumentos diagnósticos;
- o CN não recebeu a intervenção de ensino. Apenas foram aplicados os instrumentos diagnósticos. A professora da turma garantiu ter trabalhado situações aditivas no mesmo período da intervenção de ensino.

Na Figura 3.2.2, o desenho esquemático do universo de estudo.

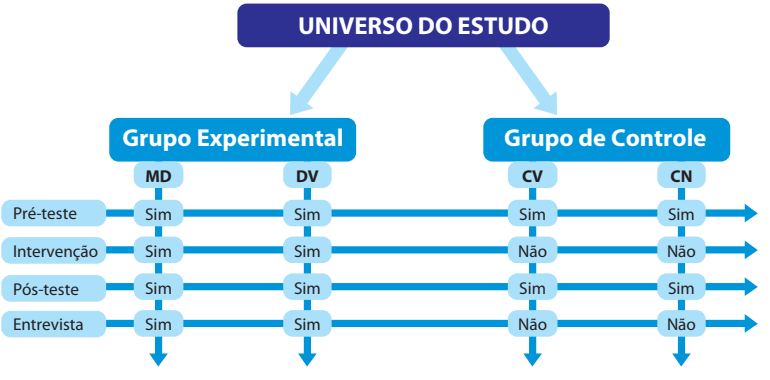


Figura 3.2.2 - Desenho do universo do estudo.

As amostras foram de conveniência, pois a formação dos grupos obedeceu à formação oriunda da direção da escola; os estudantes e a escola foram convidados a participar do estudo, seguindo os protocolos do Comitê de Ética da Universidade Estadual de Santa Cruz – (UESC), situada na cidade de Ilhéus, na região Sul da Bahia.

3.2.1 Os instrumentos diagnósticos

Conforme o que já foi colocado anteriormente, foram utilizados dois instrumentos diagnósticos, o primeiro – pré-teste – teve como objetivo principal fazer um diagnóstico dos estágios de desenvolvimento do domínio do Campo Aditivo dos estudantes que fizeram parte do Grupo Experimental e do Grupo de Controle. O segundo – pós-teste – teve como objetivo principal analisar os possíveis efeitos da intervenção de ensino no domínio do Campo Aditivo dos estudantes.

Cada um desses instrumentos, disponíveis no Apêndice A, é composto de 18 situações-problema, sendo quatro de composição, cinco de transformação, nove de comparação (incluindo itens (a) e (b)), um de comparação de várias transformações e um de transformação de uma relação. Neste, foram levados em consideração as categorias e extensões, além da presença ou não das variáveis de representação. Considerando os itens (a) e (b) de duas dessas situações-problema, os instrumentos ficam com 20 situações no total, e foi essa a quantidade considerada para a correção dos instrumentos.

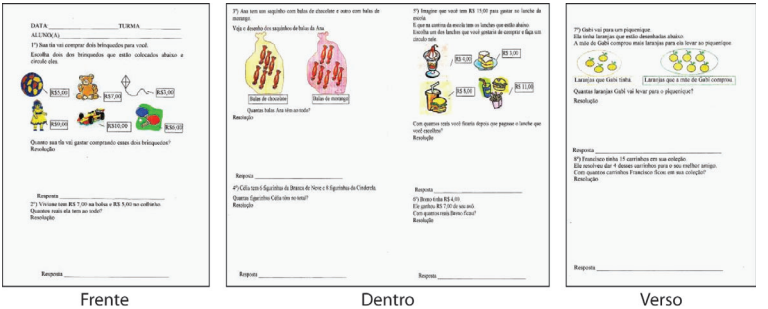
É importante ressaltar que as situações-problema do instrumento do pós-teste possuem a mesma estrutu-

ra das situações do pré-teste, mudando apenas os nomes próprios, os objetos envolvidos nos enunciados das situações, e parte das imagens dos objetos envolvidos.

3.2.2 A sequência de ensino

A sequência de ensino consta do Apêndice B e tem um total de 58 situações-problema que estão distribuídas da seguinte forma: 39 para a sala de aula e 19 para serem resolvidas em casa e, depois, discutidas em sala.

As situações-problema trabalhadas em sala de aula eram impressas numa folha de papel A4, colorida e dobrada ao meio, ficando no formato de um "livrinho". A Figura 3.2.3 mostra a imagem da frente, de dentro e do verso da atividade entregue no 1º encontro.



Frente Dentro Verso

Figura 3.2.3 - Atividade entregue em sala de aula.

As atividades de casa eram impressas em folha de papel A4, colorida e colada num caderno. A Figura 3.2.4 traz as imagens do caderno.

Na aplicação da sequência de ensino, o grupo experimental MD (material didático) utilizou o material

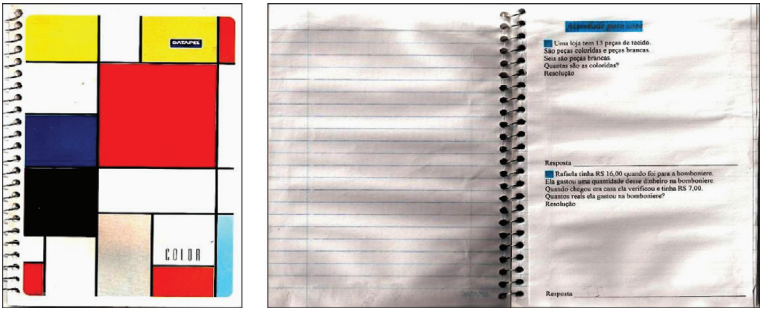


Figura 3.2.4 - Caderno de atividades de casa.

dourado e o ábaco de copinho. E o grupo experimental DV (diagramas de Vergnaud) utilizou os diagramas de Vergnaud.

3.2.3 A intervenção de ensino

Visando realizar uma intervenção que ficasse bem próxima da realidade diária dos estudantes, e tentando fazer com que a presença da pesquisadora na escola não fosse uma novidade, iniciamos a pesquisa já no início do ano letivo junto com todos os professores. No total, foram oito encontros de intervenção.

Ressaltamos que as discussões e correções efetivadas em cada encontro eram realizadas com a participação dos estudantes. Primeiro, eles liam e respondiam a situação-problema, depois era feita a leitura com os estudantes ou se pedia a apenas um deles para ler em voz alta. As interpretações eram realizadas em grupo. Em seguida, trabalhava-se com o suporte didático, prosseguia-se com a efetuação do algoritmo e, por último, era redigida a resposta final junto com o grupo.

Outro ponto importante foi em relação às atividades de casa, pois o acompanhamento, através do recolhimento dos cadernos, facilitava o trabalho no encontro seguinte. Através da correção, era possível perceber as maiores dificuldades dos estudantes em cada categoria. Assim, buscava-se reforçar as explicações daqueles pontos no encontro seguinte.

Cinco meses após a aplicação do pós-teste do estudo principal, foi aplicado um instrumento para, em seguida, ser realizada uma entrevista com parte dos estudantes do Grupo Experimental. A versão completa da atividade aplicada encontra-se no Apêndice C.

A entrevista teve como objetivo principal proporcionar a compreensão de alguns esquemas de resolução registrados pelos estudantes nos instrumentos diagnósticos e nas atividades de casa.

4 O DESEMPENHO DOS ESTUDANTES

Neste capítulo, apresentamos o desempenho, os tipos de erros mais cometidos, os esquemas de resolução, bem como possíveis conceitos-em-ação e teoremas-em-ação utilizados pelos estudantes na resolução das situações-problema aditivas.

O desempenho geral dos grupos é feito dentro de uma comparação das médias dos percentuais de acerto inter e intra-grupos.

4.1 ANÁLISE QUANTITATIVA

A análise quantitativa dos dados foi feita a partir das respostas dos estudantes, dos quatro grupos, às situações-problema contidas nos instrumentos diagnósticos. Visando analisar os desempenhos dos quatro grupos de forma mais detalhada, fizemos dois tipos de agrupamento com as situações-problema: por categoria e por extensão.

4.1.1 Análise comparativa geral do desempenho dos grupos pesquisados

Nesta seção, são considerados os 20 itens de cada teste, sendo que a pontuação final de cada estudante varia de zero a 20. Especificamente partindo dos acertos dos estudantes de cada grupo nos testes, verificamos os efeitos da intervenção de ensino conduzida pela pesquisadora.

A Figura 4.1.1 apresenta o desempenho dos quatro grupos no pré e no pós-teste, segundo os percentuais de acerto. Observa-se visualmente certa similaridade no desempenho dos grupos no pré-teste, e no pós, uma diferença que parece ter sido motivada pela interferência da intervenção de ensino deste estudo.

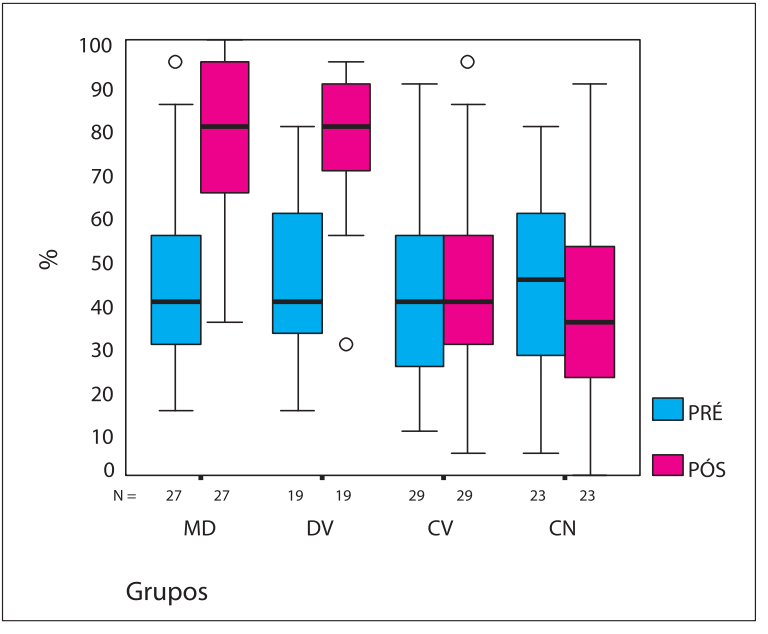


Figura 4.1.1 - Desempenho geral dos grupos, em percentual de acertos.

No pré-teste, os grupos partem de patamares de acertos muito próximos, com variação máxima de cinco pontos percentuais, a mediana foi de 40% para MD (Grupo que usou material didático), DV (Grupo que usou diagramas de Vergnaud) e CV (Grupo controle visto), e isto significa que metade dos estudantes desses grupos respondeu até oito situações-problema de forma correta, e a outra metade, mais de oito. Já o grupo CN (Grupo controle não visto) teve sua mediana em 45%, sendo que metade, do grupo acertou até nove situações e a outra metade, mais de nove.

No pós-teste, os grupos experimentais (MD e DV) elevaram seus desempenhos e os de controle (CV e CN) ficaram no mesmo patamar que no pré, apresentando certa estagnação e decrescimento.

Para analisar a média percentual de acerto dos grupos em cada teste, colocamos um gráfico de barras na Figura 4.1.2.

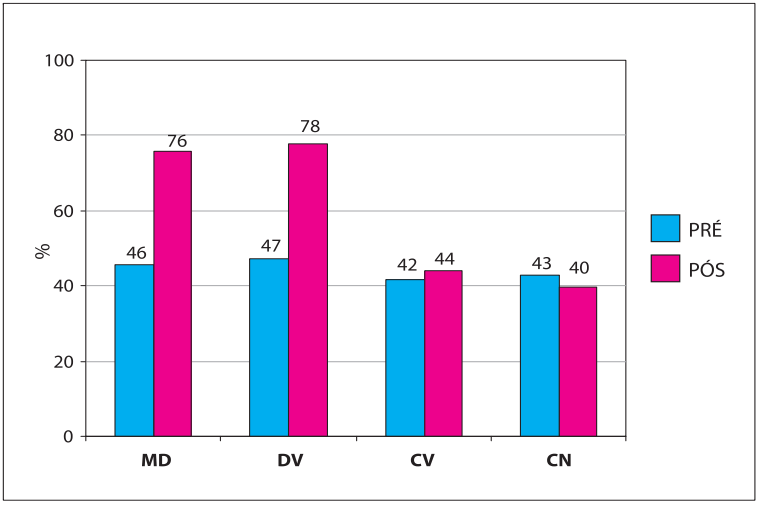


Figura 4.1.2 - Desempenho geral dos grupos, por média percentual de acerto.

De fato, os quatro grupos acertaram, em média,

de 42% a 47% das situações-problema no pré-teste. No pós-teste, essa média se elevou para 76% no grupo MD e 78% no DV, enquanto que os grupos de controle ficaram com médias de 44% (CV) e 40% (CN).

Abrindo um parêntese, gostaríamos de comparar as médias percentuais obtidas pelos grupos nos testes com notas escolares, que variam de zero a 10, com a média de aprovação, que é cinco. Observamos que todos os grupos estariam abaixo de cinco no pré-teste. Já no pós-teste, os experimentais, MD e DV, ficariam com 7,6 e 7,8 de média, respectivamente, enquanto os grupos de controle CV e CN ficariam com 4,4 e 4,0, respectivamente, ou seja, permaneceriam abaixo de cinco. Tal parêntese evidencia que, do ponto de vista escolar, apenas os grupos experimentais seriam aprovados no pós-teste. Nota-se, assim, uma divisão dos quatro grupos de estudo em dois grandes grupos.

Baseada nestes primeiros resultados gerais, obtivemos os indícios iniciais de que uma intervenção de ensino baseada na classificação apresentada pela Teoria dos Campos Conceituais para as situações-problema aditivas melhora o desempenho dos estudantes da 3ª série do Ensino Fundamental.

Apesar de o quadro comparativo do desempenho geral dos grupos indicar resultados mais positivos para os grupos experimentais quando comparados com os grupos de controle, é preciso analisar o desempenho dos grupos por categoria.

4.1.2 Análise comparativa do desempenho dos grupos por categoria

A análise comparativa com as situações-problema agrupadas por categoria está baseada na classificação

apresentada no referencial teórico (Capítulo I) para as situações aditivas. Dessa forma, o desempenho dos estudantes, nas 20 situações que compõem cada instrumento, é analisado comparativamente em cinco partes, conforme as cinco categorias envolvidas no instrumento.

4.1.2.1 Análise comparativa do desempenho dos grupos na categoria composição

A Figura 4.1.3 apresenta o desempenho geral dos grupos na categoria composição no pré e no pós-testes.

O gráfico ressalta o razoável percentual de acertos de todos os grupos já no pré-teste, desde que apresentam acertos superiores a 50%.

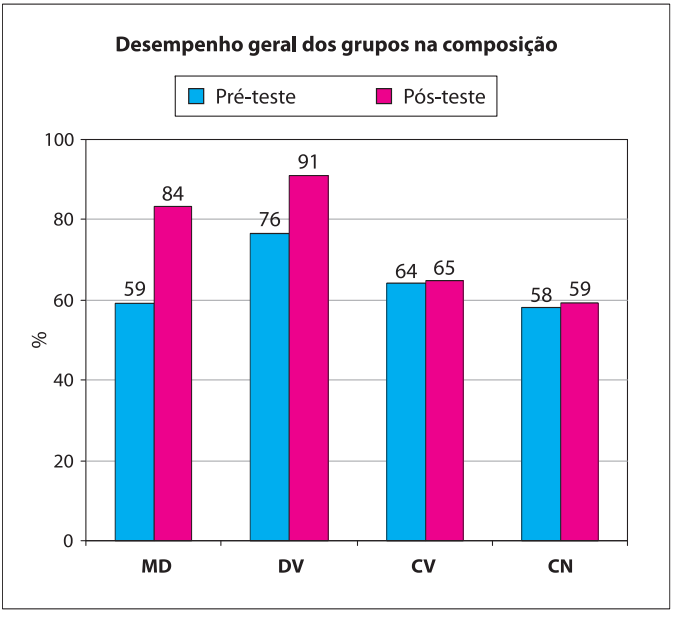


Figura 4.1.3 - Desempenho geral dos grupos na categoria composição.

De fato, nota-se que os grupos têm taxas médias de acerto, nas quatro situações-problema de composição, acima de 57% no pré-teste, e estas taxas são superiores àquelas obtidas nos desempenhos gerais (Figura 4.1.2). Estes resultados já eram esperados, visto que a composição é a categoria na qual se encontram classificadas as situações aditivas de menor complexidade (protótipos e de 1ª extensão). São essas, também, as mais trabalhadas por livros didáticos, conforme os resultados apresentados na pesquisa de Santos (2006), que analisou livros didáticos de Matemática do 2º ciclo do Ensino Fundamental. Resultados similares a estes já foram detectados em pesquisas realizadas por Magina et al (2001) e por Santana et al. (2008), dentre outras.

No pós-teste, dois comportamentos distintos são identificados: os grupos de controle ficam estagnados (com aumento de 1% em relação ao pré-teste), enquanto os experimentais aumentam consideravelmente suas taxas de acerto, atingindo médias de acerto superiores a 80%.

Quando observamos a quantidade de situações-problema desta categoria, trabalhada no CV, percebemos que o comportamento apresentado pelo grupo parece não corresponder ao trabalho realizado pela professora entre o pré e o pós-teste. Esta afirmativa decorre do seguinte fato: dentre as 36 situações trabalhadas em sala de aula, 14 eram da categoria composição (39%). Este fato parece indicar que tais atividades não foram diversificadas (explorando diversos tipos de situações) e tampouco foram trabalhadas de maneira a possibilitar a expansão do raciocínio aditivo, pelo menos no que concerne à categoria composição.

Por fim, o quadro comparativo do desempenho dos grupos na categoria composição aponta resultados iniciais positivos, porém o crescimento aconteceu apenas nos

grupos experimentais. Na sequência, a análise na transformação.

4.1.2.2 Análise comparativa do desempenho dos grupos na categoria transformação

A Figura 4.1.4 apresenta o desempenho geral dos grupos na categoria transformação no pré e no pós-teste.

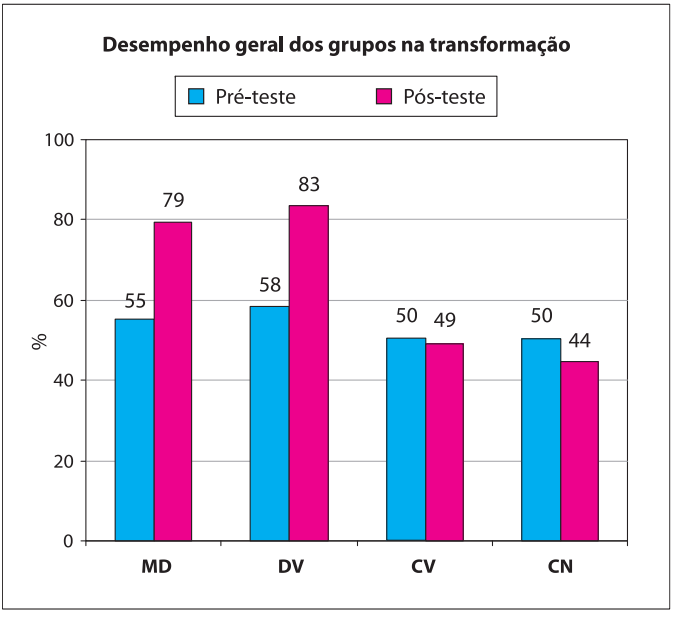


Figura 4.1.4 - Desempenho geral dos grupos na categoria transformação.

O gráfico ressalta que, tal como ocorreu na categoria composição, todos os grupos apresentaram percentuais de acerto superiores aos obtidos nos desempenhos gerais (Figura 4.1.2) no pré-teste.

De fato, a média de acertos nas situações-problema de transformação foi de, pelo menos, 50% no pré-teste.

Já no pós-teste, os grupos experimentais apresentam um crescimento de 24 e 25 pontos percentuais. Todavia, as médias são insatisfatórias nos grupos de controle.

A transformação é uma categoria que apresenta situações-problema aditivas de menor (protótipos e 1ª extensão) e de maior (4ª extensão) complexidade. E estes diferentes níveis de complexidade podem ser a explicação para a leve queda nas médias de acerto dos grupos quando comparados com os resultados obtidos na categoria composição. Pesquisas feitas por Vergnaud (1982), Magina et al. (2001), Santana et al. (2008), dentre outros, já apontam similaridades de resultados.

Um contraponto nestes resultados é revelado no CV (controle visto), pois, das 36 situações-problema trabalhadas pela professora, durante os oito encontros que compuseram as aulas destinadas ao ensino das situações aditivas, 20 eram de transformação (56%), fato este que levanta questionamentos sobre o baixo desempenho desse grupo no pós-teste.

Diante dos resultados, parece possível afirmar que o quadro comparativo do desempenho dos grupos na categoria transformação traz resultados mais positivos para os grupos experimentais, quando comparados com os dos grupos de controle. Na sequência, a análise na categoria comparação.

4.1.2.3 Análise comparativa do desempenho dos grupos na categoria comparação

A Figura 4.1.5 apresenta o desempenho geral dos grupos nas nove situações-problema classificadas na categoria comparação no pré e no pós-teste.

No pré-teste, os grupos saíram de um patamar de acertos considerado baixo, sem atingir os 40% de acertos. Se comparados com os percentuais médios de acertos nas categorias até aqui analisadas, nota-se que estas foram as menores médias iniciais, sendo, inclusive, inferiores às obtidas nos desempenhos gerais (Figura 4.1.2).

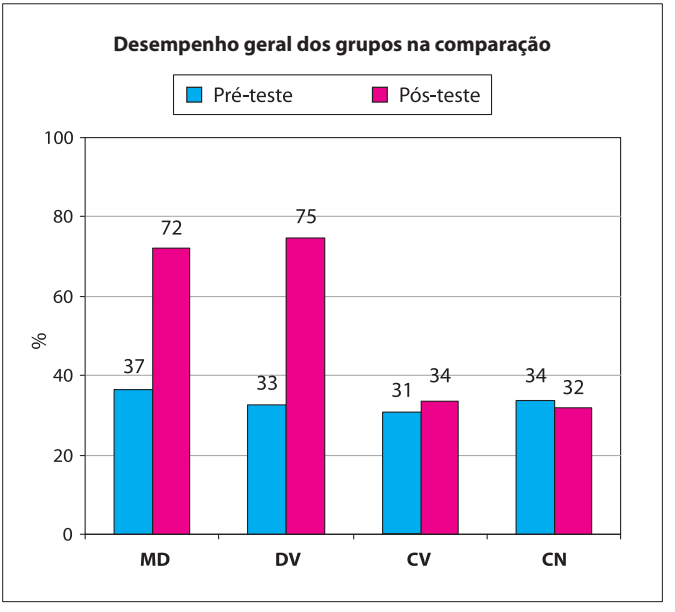


Figura 4.1.5 - Desempenho geral dos grupos na comparação.

De fato, das três primeiras categorias, a comparação foi a que apresentou as menores médias, tanto no pré quanto no pós-teste. Este baixo desempenho parece ser explicado pela complexidade apresentada nas situações aditivas classificadas nessa categoria, pois nela estão extensões tidas como mais complexas (2ª, 3ª e 4ª). Guimarães (2009) afirma que estudantes da 3ª série têm dificuldades na resolução de situações-problema pertencentes a esta categoria.

Santos (2006) também identificou que a categoria comparação, junto com a transformação, são pouco abordadas pelos livros didáticos adotados por escolas públicas da região Sul da Bahia, onde a presente pesquisa foi realizada.

Analisando especificamente os desempenhos no pré e no pós-teste, observamos a mesma tendência de comportamento nas três categorias (composição, transformação e comparação): uma estagnação dos grupos de controle e um crescimento dos grupos experimentais. No caso particular da comparação, o MD cresce 35% e o DV 42%, já o grupo CV cresce 3% e o CN decresce 2%.

Mais uma vez, observando as médias de acerto nas situações-problema agrupadas por categoria, é possível afirmar que o desempenho dos grupos na categoria comparação traz resultados mais positivos para os grupos experimentais quando comparados com os grupos de controle. Na sequência, a análise na categoria transformação de uma relação.

4.1.2.4 Análise comparativa do desempenho dos grupos na categoria transformação de uma relação

A Figura 4.1.6 apresenta o desempenho geral dos grupos na categoria transformação de uma relação (TR) no pré e no pós-teste. Apenas uma das situações dos instrumentos é classificada na categoria TR. Assim, a média de acertos apresentada na Figura 4.1.6 é relativa ao desempenho numa única situação.

O gráfico ressalta que os percentuais de acerto foram superiores aos obtidos nos desempenhos gerais (Figura 4.1.2) no pré-teste de todos os grupos, exceto do CV.

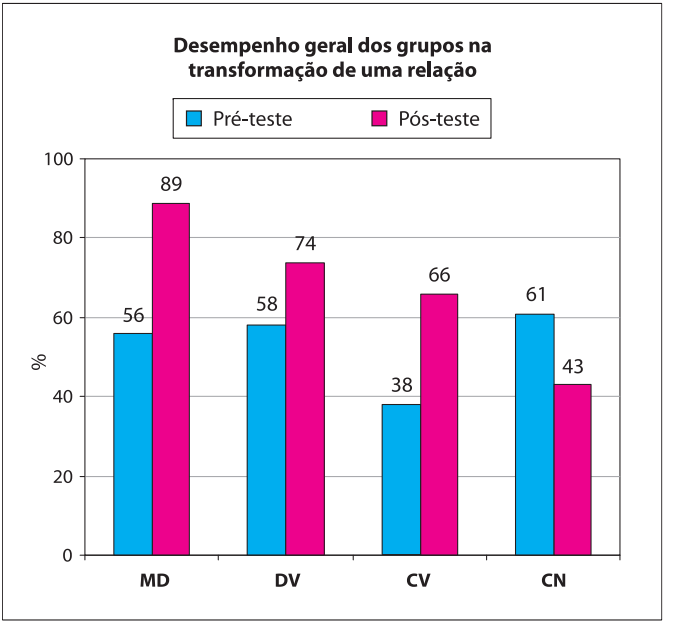


Figura 4.1.6 - Desempenho geral dos grupos na categoria transformação de uma relação.

Contudo, o CV apresenta crescimento satisfatório do pré para o pós-teste, junto com o MD e o DV.

Outra informação que pode ser extraída da Figura 4.1.6 diz respeito ao crescimento em pontos percentuais dos grupos do pré para o pós-teste nessa situação. Pela primeira vez, o crescimento de um grupo de controle supera o de um dos grupos experimentais na média de acertos do pré para o pós-teste. Observa-se que MD cresce 33 pontos percentuais, DV, 16, enquanto CV cresce 28 pontos percentuais.

O bom desempenho dos grupos (exceto o CV) já no pré-teste parece ser explicado pela estrutura da própria situação: o objeto é o dinheiro e a situação envolve uma negociação de débito e pagamento. A convivência com

os estudantes revelou que eles são confrontados, cotidianamente, com situações dessa natureza, visto que muitos trabalham vendendo doces pelas ruas da cidade ou frutas na feira, o que indica que a maior parte dos estudantes tem um convívio quase diário com esse tipo de situação. Isto, porém, não parece ser válido para o grupo CV.

Cabe ressaltar que os resultados apresentados por Guimarães (2005) e Santos (2006), a partir de estudos realizados em regiões distintas do Brasil, mostram que a categoria TR, em geral, não é trabalhada nos livros didáticos normalmente adotados por professores.

Por fim, podemos afirmar que o quadro comparativo do desempenho dos grupos na categoria TR aponta resultados positivos do pré para o pós-teste do MD, do DV e do CV. Na sequência, a análise na categoria composição de várias transformações.

4.1.2.5 Análise comparativa do desempenho dos grupos na categoria composição de várias transformações

A Figura 4.1.7 traz o desempenho geral dos grupos na categoria composição de várias transformações (CT) no pré e no pós-teste. Observa-se que, mesmo no pós-teste, os grupos ressaltam percentuais de acerto inferiores aos obtidos no desempenho geral (Figura 4.1.2).

São os menores percentuais de acerto registrados nos testes. Estes resultados já eram esperados, por causa da complexidade da situação apresentada. Resultados similares foram encontrados por Guimarães (2009); a autora afirma que, nesta categoria, os estudantes apresentaram maior dificuldade.

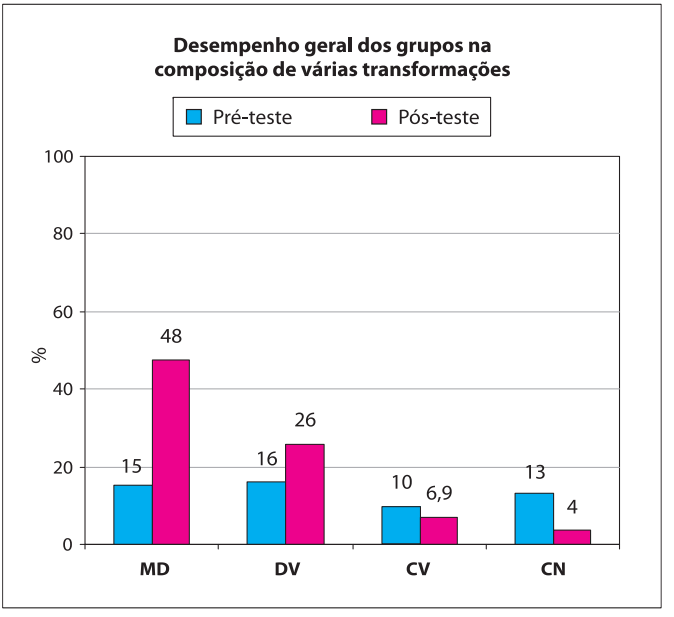


Figura 4.1.7 - Desempenho geral dos grupos na categoria composição de várias transformações.

Ressaltamos que, mesmo após a intervenção com os grupos experimentais, os estudantes permanecem com dificuldades para compreender os conceitos envolvidos na situação, como: sucessivas transformações positivas e negativas, composição de várias transformações, transformações com ausência de estado inicial e final. Podemos afirmar que, das cinco categorias trabalhadas nos encontros de intervenção, CT foi a que apresentou maiores dificuldades de compreensão. Por diversas vezes, eles afirmaram: -"Tia, não estou entendendo como fazer esse"[1].

[1] Afirmações feitas de forma oral pelos estudantes dos grupos experimentais, tendo sido as falas registradas nas gravações realizadas ao longo dos encontros com os grupos.

Vergnaud (1982) comparou o desempenho de estudantes em situações de transformação e de composição de duas transformações, com relação ternária, e obteve resultados com baixos percentuais de acerto para a última categoria.

Os grupos de controle tiveram menor desempenho no pós-teste, e os experimentais melhoraram o desempenho. Por fim, o quadro comparativo do desempenho dos grupos na categoria CT indica os mais baixos desempenhos por categoria. Há crescimento apenas nos grupos experimentais, e esses são positivos, mas insatisfatórios. Contudo, o crescimento do MD parece apontar para uma pequena superação na influência do uso do material didático quando comparado com o material representacional utilizado.

4.1.3 Análise do desempenho dos grupos por extensão

Nesta seção, analisamos a existência de possíveis diferenças no desempenho dos grupos, segundo a classificação das situações-problema, considerando as extensões. Assim, observamos o desempenho dos quatro grupos a partir das extensões. A análise comparativa dos grupos dar-se-á em duas partes: protótipos e extensões (1ª, 2ª, 3ª e 4ª).

4.1.3.1 Análise do desempenho dos grupos nas situações-problema protótipo

Nas situações-problema protótipo, busca-se o valor total da composição ou o valor final da transformação. Assim, neste tipo de situação, o estudante é levado a

buscar o valor de um todo ou de uma condição final ao estabelecer uma relação entre objetos: dinheiro, grupos, conjuntos, dentre outras coisas.

A Figura 4.1.8 apresenta o desempenho geral dos grupos nas quatro situações-problema protótipo nos pré e pós-testes.

O gráfico ressalta um alto percentual de acertos para todos os grupos em ambos os testes, sendo todos superiores aos obtidos nos desempenhos gerais (Figura 4.1.2).

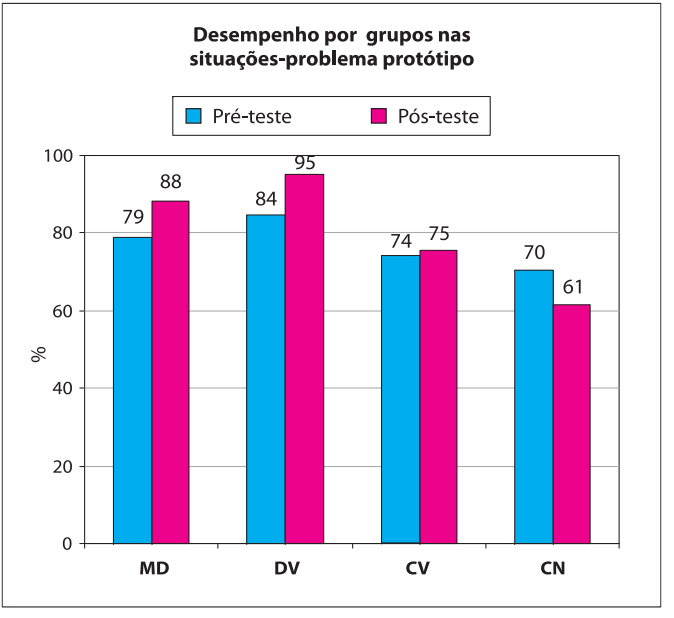


Figura 4.1.8 - Desempenho geral dos grupos nas situações-problema protótipo.

De fato, os grupos apresentaram percentuais de acerto a partir de 70% já no pré-teste, e o crescimento, que ocorreu apenas nos dois grupos experimentais, foi pequeno, o que pode ser justificado pelo chamado "efeito

de teto". Os comportamentos dos grupos de controle são similares aos já vistos anteriormente, com o CV apresentando pequeno crescimento e o CN decrescendo, numa clara evidência de que o trabalho das professoras pouco, ou nada, contribuiu para a expansão desse campo conceitual, mesmo em situações-problema com estruturas simples.

Os bons resultados no pré-teste já eram esperados, pois, ao se observar as situações-problema pelas extensões, os protótipos são os de menor complexidade. Além disso, segundo Magina et al. (2001), essas são as situações em que as crianças têm maior contato em sua vida diária, mesmo antes de frequentar a escola. Como foi colocado no Capítulo I, para Vergnaud (1982), o domínio de um conceito ocorre por meio da *experiência*, *maturação* e *aprendizagem*. Pelas afirmações de Magina et al. (2001), e pelas colocações de Vergnaud (1982), a experiência parece ser o principal fator de influência no desempenho das situações-problema protótipo.

Em suma, o desempenho dos grupos, nas quatro situações-problema protótipo, foi satisfatório. Embora pequeno, os grupos experimentais apresentaram crescimento do pré para o pós-teste, enquanto os grupos de controle tiveram estagnação e decrescimento.

4.1.3.2 Análise do desempenho dos grupos nas situações-problema por extensão

A Figura 4.1.9 traz o desempenho geral dos grupos nas situações-problema por extensão. As médias referem-se às respectivas quantidades de situações em cada uma

das extensões: quatro de 1ª extensão; duas de 2ª extensão; quatro de 3ª extensão; e quatro de 4ª extensão.

Os gráficos da Figura 4.1.9 ressaltam patamares muito próximos nas médias percentuais de acerto dos quatro grupos no pré-teste.

Os gráficos mostram que, no pré-teste, os percentuais de acerto dos quatro grupos não chegaram a 60% em nenhuma das extensões. No que se refere aos grupos experimentais, foi na 3ª extensão que eles obtiveram seus mais baixos percentuais de acerto nesse teste.

No pós-teste, os grupos experimentais elevaram suas médias percentuais de acerto quando comparados com eles próprios e com os de controle, sendo que esses últimos apresentaram certa estagnação, ou, até, pequenas quedas.

Essa diferença entre os resultados por extensão permite classificar, de um lado, os grupos experimentais apresentando crescimento significativo, e, de outro, os grupos de controle apresentando estagnação. Vale ressaltar que não houve diferença entre os grupos experimentais quando comparados seus crescimentos em cada uma das extensões, uma vez que ambos cresceram em patamares muito próximos. Já o comportamento apresentado pelos grupos de controle foi distinto, exceto na 1ª extensão. Eles oscilaram entre crescimento e decrescimento, com diferenças muitas vezes significativas.

Em resumo, os grupos experimentais apresentaram crescimento na 1ª, 2ª, 3ª e 4ª extensões. No que se refere às médias finais alcançadas por esses grupos nas situações-problema de 4ª extensão, estas foram as que apresentaram menor crescimento. Tal resultado indica que, embora a intervenção de ensino tenha destinado para esta

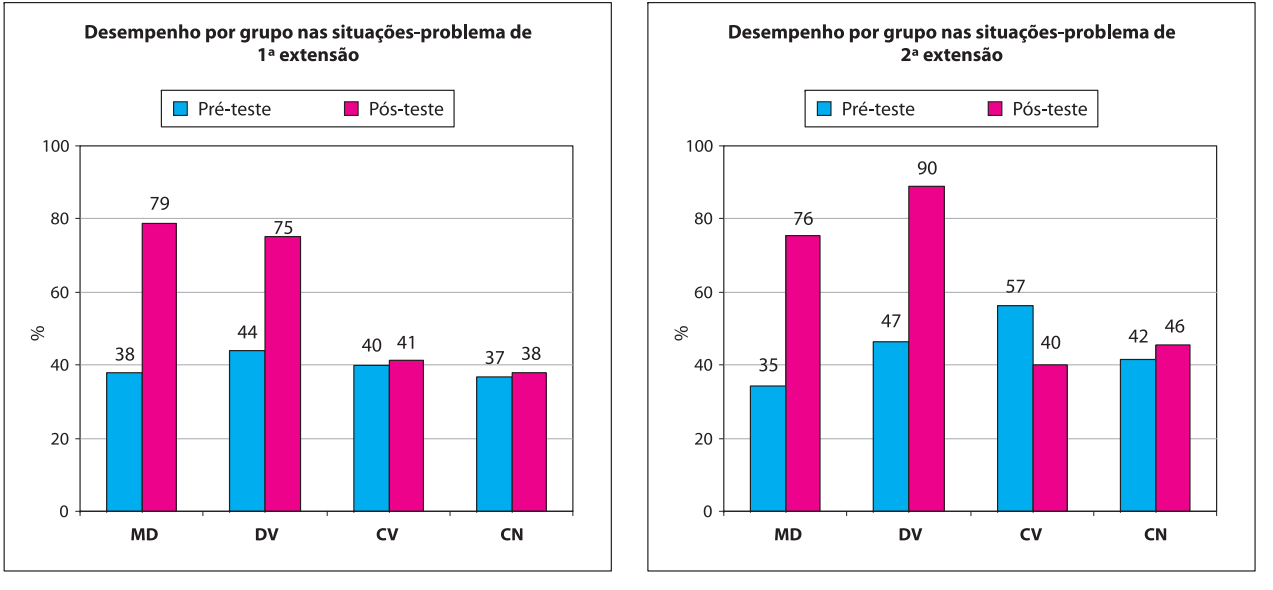


Figura 4.1.9 - Desempenho geral dos grupos nas situações-problema por extensão.

(continua)

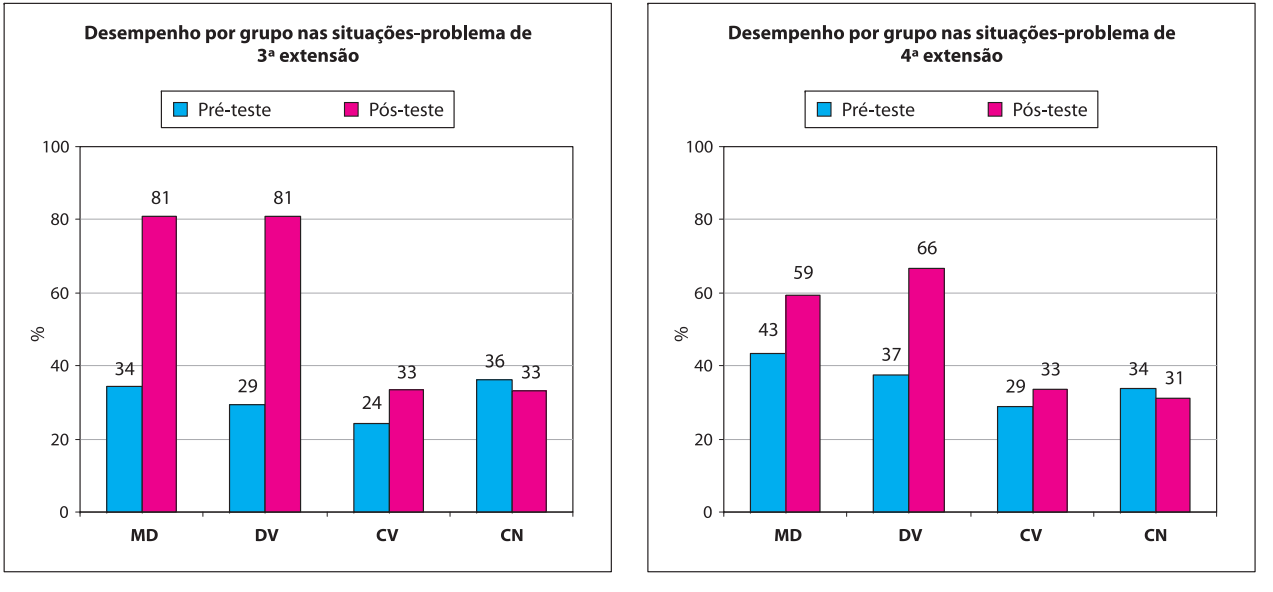


Figura 4.1.9 - Desempenho geral dos grupos nas situações-problema por extensão.

(conclusão)

extensão o mesmo tempo de trabalho destinado às outras três primeiras, este foi pouco para o trabalho com a 4ª extensão.

A partir desses resultados, refletimos sobre a necessidade de se planejar as atividades para trabalhar os conceitos do Campo Aditivo com atenção especial para as dificuldades inerentes a cada extensão, dedicando maior tempo àquelas mais complexas. Nessa reflexão, é preciso também não esquecer que a série e a faixa etária são fatores importantes a serem levados em consideração.

4.1.4 Síntese da análise quantitativa do desempenho dos grupos

A análise quantitativa feita a partir dos instrumentos diagnósticos (pré e pós-testes) dos quatro grupos revela, num quadro comparativo geral, que, no pré-teste, os grupos saem de percentuais de acerto muito próximos, contudo, após a intervenção de ensino, segundo os percentuais de acerto no pós-teste, os quatro grupos se subdividem em dois grandes grupos: os que crescem significativamente e os que ficam estagnados. Não por acaso, estes grupos que crescem são os experimentais.

Ao agrupar as situações-problema segundo as categorias, observa-se que, nas categorias principais, os grupos saem, no pré-teste, de percentuais de acerto muito próximos, e no pós-teste, os experimentais novamente crescem, enquanto os de controle ficam estagnados. Quanto às duas outras categorias (TR e CT), os comportamentos sofrem alguma modificação. Na categoria TR, há crescimento nos grupos experimentais e ainda no CV.

Já na categoria CT, apenas os experimentais crescem e esse crescimento não é grande em se tratando do DV.

Com as situações-problema agrupadas conforme as extensões, observa-se que todos os grupos obtêm seus melhores desempenhos nos protótipos e isso acontece já no pré-teste. Nas demais extensões, os grupos partem no pré-teste de percentuais de acerto dentro de um mesmo patamar, e no pós-teste os experimentais crescem significativamente mais, tanto na consideração intra grupo, quanto na comparação com os grupos de controle. Esses últimos ficam estagnados.

Finalmente, é possível concluir que são confirmados, ao longo da análise quantitativa, os indícios iniciais sobre a influência positiva que uma intervenção feita com uma sequência de ensino baseada na classificação dada na Teoria dos Campos Conceituais para as situações-problema aditivas no desempenho dos estudantes. Isto se confirma independentemente dos suportes didáticos utilizados.

Então, fica clara a necessidade de uma atenção especial para o trabalho com os conceitos do Campo Aditivo. Defendemos a ideia de que para se obter melhor desempenho por parte do estudante, é preciso confrontá-lo com situações-problema que busquem o domínio desse Campo, atentando-se tanto para as categorias quanto para as extensões. Propomos que, uma vez certificado que o estudante já apresenta certo domínio dos conceitos envolvidos nas situações-problema protótipo de composição e de transformação, é preciso avançar no ensino das demais extensões e categorias.

Por fim, vale ressaltar que, a partir da experiência obtida no presente estudo, é possível afirmar que o domí-

nio dos conceitos do Campo Aditivo não ocorre plenamente na 3ª série e, possivelmente, também não irá ocorrer na 4ª série. De fato, levará tempo para que ocorra plenamente o referido domínio, o que vem corroborar com as afirmações feitas por Vergnaud (1982, 1984, 1988a, 1988b, 1990, 1991, 1994, 1996, 1997, 1998) sobre o longo período de tempo necessário para que o estudante domine um dado Campo Conceitual.

4.2 ANÁLISE QUALITATIVA

Uma análise quantitativa não permite examinar os esquemas de resolução dos estudantes, bem como as principais dificuldades e os impasses para a resolução, seja isto nos testes ou nas atividades da intervenção. Para que possamos compreender estes trâmites inerentes ao processo de aprendizagem, é preciso proceder uma minuciosa análise qualitativa. Neste momento, esclarecemos que a condução da presente análise toma como base apenas os grupos experimentais MD (material didático) e DV (diagrama de Vergnaud).

Desse modo, observamos e revelamos erros cometidos pelos estudantes ao resolverem as situações-problema aditivas, bem como buscamos desvendar uma possível ligação dos erros com as categorias e extensões dessas situações. Além disso, buscamos identificar esquemas de resolução utilizados pelos estudantes.

A análise segue em três fases: na primeira, analisamos as resoluções apresentadas pelos estudantes nos instrumentos diagnósticos (pré e pós-testes). Na segunda fase, as atividades realizadas durante o processo de

intervenção de ensino. E na terceira, os instrumentos diagnósticos, bem como das atividades de casa, na tentativa de elucidar os esquemas de resolução mais utilizados e, ainda, procuramos identificar possíveis conceitos-em-ação e teoremas-em-ação.

4.2.1 Análise dos instrumentos diagnósticos

A classificação dos erros, utilizada para realizar a presente análise, emergiu da correção das resoluções dadas pelos estudantes. Dessa forma, fizemos dois tipos de abordagem: uma para os instrumentos diagnósticos (pré e pós-testes) dos grupos e as atividades de casa do grupo MD; e uma para as atividades de casa do grupo DV. Embora reconhecendo que as situações-problema tenham sido as mesmas para os dois grupos, estamos considerando que a utilização de diferentes suportes didáticos (material didático e diagramas de Vergnaud) pode ter conduzido os estudantes a utilizar estratégias de resolução que diferem de um grupo para outro e, dessa forma, podem variar os procedimentos de erro durante o processo de intervenção. Para facilitar a leitura, as classificações serão apresentadas junto com a análise.

4.2.1.1 Análise dos erros detectados nos instrumentos diagnósticos

Três principais tipos de erro foram revelados pela análise dos esquemas usados pelos estudantes na resolução das situações-problema – erro *incompreensível*, erro

no *cálculo numérico* e erro no *cálculo relacional*. Uma quarta classificação foi denominada de *em branco*, colocada para a ausência de resolução, quando não foi detectado qualquer tipo de registro. A Tabela 4.2.1 apresenta a quantificação dos referidos tipos de erro segundo cada grupo por teste.

Tabela 4.2.1 - Quantidade de erros no pré e no pós-teste por tipo e grupo

Grupo	Incompreensível		Cálculo numérico		Cálculo relacional		Em branco	
	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
MD	39	14	44	15	186	101	24	1
DV	19	1	30	10	117	73	36	1
Total	58	**15**	74	**25**	303	**174**	60	**2**

Ao se observar a tabela, nota-se que, no total, os dois grupos diminuíram consideravelmente a incidência de todos os tipos de erro no pós-teste.

1. **Erro *incompreensível*** – foram classificados como erros *incompreensíveis* os procedimentos[2] nos quais não foi possível fazer inferências baseadas em evidências (sobre o que estava registrado). Em alguns casos, levantamos hipóteses, mas tendo a consciência de que elas são apenas possibilidades. As resoluções foram classificadas neste tipo de erro quando o estudante utilizou números que "aparentemente" não faziam parte da situação, sendo que, em alguns casos, usou o número de ordem da situação-problema apresentada. Também houve casos em que o estudante chegava a fazer algum rabisco (riscos ou

[2] Procedimento será usado aqui como execução dos esquemas de resolução utilizados pelos estudantes.

bolinhas) que não tinha, "aparentemente", qualquer relação com sua resposta, ou, ainda, sem apresentar qualquer resposta numérica para a situação, restringindo-se apenas aos rabiscos. Esses procedimentos impossibilitaram uma análise plausível das relações estabelecidas pelo estudante.

A Figura 4.2.1 apresenta um exemplo que ilustra a variável de análise erro *incompreensível*. Refere-se à solução dada pela estudante Mai[3], do grupo MD, à situação 2 do pré-teste (transformação de 4ª extensão).

Problema 2. Fátima tem lapis de cor no seu estojo, deu alguns para sua colega, e ficou com 13 lapis. Veja o desenho dos lapis que Fátima deu.

Os lápis que Fátima deu.

Qauntos lápis Fátima tinha antes? Treze

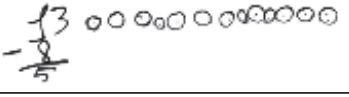
Resolução	Resposta
	del anos

Figura 4.2.1 - Exemplo de erro *incompreensível*, cometido por Mai na situação 2 do pré-teste.

Nesta resolução, Mai arma uma conta de subtração com o valor 8 no subtraendo, e este valor "aparentemente" não faz parte do enunciado. Todavia, Mai opera cor-

[3] A fim de preservar o anonimato dos sujeitos de pesquisa, todos os nomes citados nesta análise são fictícios. Foram criados nomes formados apenas por até quatro letras.

retamente e coloca a diferença encontrada como resposta à situação-problema. Não há como fazer qualquer afirmação sobre o raciocínio utilizado por Mai para esquematizar a sua resolução, pois a operação de subtração, juntamente com a utilização do número 8, não fazem parte das resoluções institucionalizadas para a situação apresentada. Tampouco a resposta oferecida por Mai para a situação-problema está correta. Uma possibilidade quanto a Mai ter utilizado o número 8 é pensar que ela pode ter associado a palavra "estojo" à quantidade mais comumente vendida numa caixa de lápis de cor (12 unidades), fazendo a subtração dessa quantidade (12), da quantidade pictórica da situação-problema (os 4 lápis que Fátima deu para sua colega). Porém, isto é apenas uma dentre muitas possibilidades; é uma hipótese nossa, a de que Mai trouxe para a situação-problema apresentada um dado de sua realidade, totalmente extra-situação.

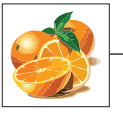
Ao analisar esse tipo de erro com relação às situações-problema apresentadas aos estudantes e, ainda, levando em consideração os testes (pré e pós), notamos que a maior incidência de respostas *incompreensíveis* no pré-teste foi na situação-problema 12 (composição de 1ª extensão pictórica). No pós-teste, essa incidência se dilui, não mais havendo uma situação-problema concentrando um acentuado número desse tipo de erro.

Uma possível interpretação para o desempenho dos estudantes na situação-problema 12 do pré-teste é a possibilidade de o estudante ter relacionado esta situação com a realidade vivida por ele, pois a banana é uma fruta muita vendida na feira livre da cidade. Assim, é possível que os estudantes tenham pensado no preço que esta fruta costuma ser comercializada no dia a dia.

A Figura 4.2.2 traz um exemplo de resposta desse tipo dada pelo estudante Eri na situação 12.

Problema 12. Alberto foi à feira para comprar bananas e laranjas. Ele gastou R$ 17,00 ao todo. Sua mãe quer saber quanto custou cada quantidade de fruta. Veja abaixo quanto ele pagou pelas laranjas.

R$ 4,00



R$ 8,00

Quanto ele pagou pelas bananas?

Resolução	Resposta
4 + 8 = 12	Alberto gastou 12 reais

Figura 4.2.2 - Exemplo de erro *incompreensível*, cometido por Eri na situação 12 do pré-teste.

Observe que, na resolução, Eri faz a operação de adição com as parcelas 4 e 8, e coloca a resposta "Alberto gastou 12 reais"; além disso, escreve R$ 4,00 na etiqueta do preço das bananas. De fato, em algumas respostas, os estudantes registraram o valor de quatro reais e na figura havia o desenho de quatro pencas de banana, sendo possível imaginar o preço de um real por penca, que é um preço médio encontrado na feira livre. Todavia, tal como aconteceu na resposta dada por Mai, essa interpretação é uma entre muitas possibilidades; é uma hipótese nossa supor que os estudantes trouxeram dados de sua realidade para a resolução da situação apresentada. Portanto, a opção foi classificá-las como *incompreensível*.

A acentuada queda na incidência deste tipo de erro no pós-teste parece indicar que a intervenção de ensino contribuiu para que os estudantes conseguissem registrar de forma mais coerente seus esquemas de resolução para as situações apresentadas.

2. **Erro no *cálculo numérico*** – foram classificados erros relacionados ao *cálculo numérico*, aqueles em que o estudante: não fez a contagem corretamente, armou a conta incorretamente, ou errou ao efetuar o algoritmo da operação por ele selecionada.

A primeira coisa que salta aos olhos na análise desse tipo de erro foi a sua queda vertiginosa do pré para o pós-teste nos dois grupos (MD e DV), e essa queda representa uma redução aproximada de 2/3 dos erros cometidos inicialmente, como aponta a Tabela 4.2.1. Para discutir esses erros, subdividimos em três tipos: *contagem*, *armar conta* e *efetuar conta*. Vejamos as observações e análises de cada um:

Erro na *contagem*: quando o estudante demonstrou ter contado incorretamente as quantidades contidas na(s) figura(s) da situação-problema. Este procedimento foi pouco frequente entre os estudantes, porém, tal como aconteceu na classificação geral do erro de *cálculo numérico*, aqui também ele diminuiu no pós-teste (4 no pré e 2 no pós-teste). A Figura 4.2.3 apresenta a ilustração de um procedimento desse tipo feito pela estudante Una, do grupo MD, na situação-problema 5 (comparação de 2ª extensão, pictórica) do pós-teste.

Na resolução, Una arma uma operação de adição com os números 8 e 4, e responde: "*Igor tem 12 balões*". Há uma indicação de que Una realizou a contagem porque há uma marca precisa em oito dos balões.

Porém, o balão verde escuro não foi marcado, o que nos leva a pensar que Una não o contou. Além disso, Una colocou 8 numa das parcelas da conta armada por ela, ao invés de colocar 9, que seria a quantidade correta. Isto nos conduz a suposição de que o erro de Una foi na *contagem*.

Problema 5. Bruna e Igor têm balões. Veja o desenho abaixo.

Igor tem 4 balões a mais que ela. Quantos balões tem Igor?

Resolução	Resposta
$\begin{array}{r} +\,8 \\ 4 \\ \hline 12 \end{array}$	Igor tem 12 balões

Figura 4.2.3 - Exemplo da variável erro na *contagem*, cometido por Una na situação 5 do pós-teste.

Erro ao *armar conta*: quando a conta foi armada de forma incorreta, por exemplo, sendo colocado o valor da unidade na ordem das dezenas. Dos três procedimentos de erro classificados dentro do *cálculo numérico*, o que chamou mais atenção foi o erro ao *armar a conta*, pois não é esperado que estudantes de 3ª série ainda apresentem dificuldades em armar uma simples conta de adição ou subtração; que não conheçam as trocas do sistema de numeração decimal, como, por exemplo, que 10 unidades correspondem a uma dezena.

Após a intervenção, esse procedimento apresenta uma queda considerável em suas repetições, ocorrendo apenas 4 vezes (2 em cada grupo). A Figura 4.2.4 traz exemplo das quatro formas de procedimento dos erros efetivados ao armar a conta.

Os exemplos apresentados na Figura 4.2.4 referem-se a procedimentos registrados no pré-teste. Vejamos as especificações de cada um deles:

- Com a situação-problema 6 – comparação de 4ª extensão – exemplificamos o erro em que a ordem da unidade e da dezena são confundidas. Veja que o estudante Ueri escolheu e efetuou corretamente a operação, contudo registrou 7 unidades como sendo 7 dezenas. Se fossem 7 dezenas (R$70,00) a resposta apresentada por Ueri estaria correta, mas por não conseguir armar a conta corretamente ele errou a resposta colocando: *"Rita comprar chocolate 83,00 reais"*. No pré-teste, tal procedimento foi igualmente realizado por quatro estudantes do MD e por apenas um do DV. Contudo, após a intervenção de ensino, os estudantes não mais realizaram esse tipo de procedimento.
- A situação 13 – comparação de 3ª extensão – elucida o procedimento em que o estudante troca o minuendo pelo subtraendo. A estudante Pam colocou 9,00 no minuendo, 13,00 no subtraendo e efetuou a operação como se 9,00 fosse maior que 13,00. No pré-teste, esse tipo de procedimento foi feito por cinco estudantes do grupo MD, não tendo sido feito por nenhum do DV. Após a intervenção, esse procedimento desaparece no MD, mas dois estudantes do DV o registram no pós-teste.

Problema 6. Arlete tem dinheiro para comprar chocolate e Rita tem R$ 7,00 a menos que Arlete. Sabendo que Rita tem R$ 13,00, quantos reais tem Arlete?

Resolução	Resposta
+ 7,00 13,00 R$ 3,00	Rita comprar Chocolate R$ 3,00 reais

Problema 13. Leila tem R$ 9,00. Cláudio tem R$ 13,00. Quem tem menos reais? Quantos reais a menos?

Resolução	Resposta
- 9 00 1 3 00 1 6 00	16 reais

Problema 14. Eduardo tem 16 carrinhos de brinquedo e Ramon tem 7 a menos do que ele. Quantos carrinhos de brinquedo tem Ramon?

Resolução	Resposta
+ 1 6 7 14	Ramon

Problema 16. José tem livros de histórias infantis. Ele ganhou 3 livros de seu pai, 2 livros de sua professora e 4 livros de sua tia. José resolveu dar 3 dos seus livros mais velhos para seu amigo Jonas e 2 para seu amigo Rogério. Descontando os livros que José deu, em quanto aumentou o número de livros de José?

Resolução	Resposta
324 - 32 292	José deu 292 reais

Figura 4.2.4 - Exemplos de procedimentos com erro no *cálculo numérico*, observados no registro ao *armar a conta*.

– A situação-problema 14 – comparação de 2ª extensão – mostra o procedimento em que todos os algarismos dos números são colocados como unidade. O registro foi feito pelo estudante Uri. Ao armar a conta "16 + 7", Uri trata os algarismos como se fossem apenas unidades (1 + 6 + 7). Dois estudantes do grupo MD cometeram esse tipo de erro, todavia, após a intervenção de ensino com o uso do material didático, eles não mais registraram tal procedimento. Já no grupo DV, esse tipo de procedimento não foi observado, seja no pré, seja no pós-teste.
– A resolução da situação 16 – composição de várias transformações – mostra o procedimento em que o estudante dispõe as unidades de tal forma que as transformou em dezena ou centena. Bete, como ilustra o exemplo, armou uma única operação, na qual colocou os números referentes às transformações positivas (3, 2 e 4, formando o número 324) no minuendo, e no subtraendo os números referentes às transformações negativas (3 e 2, formando 32). Outros estudantes fizeram da mesma forma que Bete, o que nos levou a interpretar que eles sabiam que as transformações negativas precisavam ser retiradas das positivas, contudo não sabiam expressar essa compreensão por meio dos algoritmos.

Erro ao *efetuar a conta*: quando a conta foi armada de forma correta, mas o estudante não conseguiu efetuar o algoritmo corretamente. Dos três procedimentos classificados como erro no *cálculo numérico* (na *contagem*, no

armar, ou no *efetuar* a conta), o mais recorrente nos dois testes foi o de *efetuar a conta*.

A Figura 4.2.5 mostra exemplos de dois registros com erro no procedimento ao *efetuar a conta*; estes ocorreram com mais incidência no pré-teste e praticamente deixaram de ser registrados no pós-teste.

Problema 9. Beatriz devia R$ 12,00 a Cris. Ela pagou R$ 8,00. Quanto Beatriz ficou devendo a Cris?

Resolução	Resposta
12 − 8 14	Beatriz ficou devendo a Cris.

Problema 14. Eduardo tem 16 carrinhos de brinquedo e Ramon tem 7 a menos do que ele. Quantos carrinhos de brinquedo tem Ramon?

Resolução	Resposta
−16 7 11	Ramon tem 11 carrinhos

Figura 4.2.5 - Exemplos de procedimentos com erro no *cálculo numérico*, observado no registro ao *efetuar a conta*.

Vejamos as especificações dos exemplos apresentados na Figura 4.2.5:

– Com a situação-problema 9 – transformação de uma relação –, ilustramos o procedimento em que a dezena é transformada em unidade e continua sendo contada na ordem da dezena. O exemplo é da resolução registrada pela estudante Ine.

Observe que ela registrou o número 12 em cima das duas unidades, efetuou corretamente a operação na ordem das unidades registrando quatro unidades na diferença, contudo repetiu o valor um na ordem da dezena, deixando de considerar que já havia feito a "troca" dessa dezena por 10 unidades. Ine não colocou o valor numérico encontrado (14) na resposta, apenas escreveu: *"Beatriz ficou devendo a Cris"*.

No pré-teste, foram registrados seis procedimentos similares ao desenvolvido por Ine; já no pós-teste, tal procedimento foi registrado uma única vez.

– Com a situação-problema 14 – comparação de 2ª extensão –, mostramos o procedimento em que parte da subtração é feita do subtraendo para o minuendo. O registro foi feito pelo estudante Noe. Observe que ele fez 7 – 6, e em seguida, 1 – 0, depois colocou como resposta "Roman tem 11 carinhos". As afirmativas sobre o esquema mobilizado pelo estudante para a resolução decorrem da experiência em sala de aula durante a intervenção, pois esse foi o esquema expressado por Noe e também por outros estudantes quando questionados a respeito dos procedimentos registrados em atividades similares.

A seguir, na Figura 4.2.6, apresentamos um exemplo do procedimento no qual os estudantes erraram por adicionar ou subtrair com diferença de algumas unidades. Tal procedimento ocorreu com frequência em ambos os testes.

Problema 13. Leila tem R$ 9,00. Cláudio tem R$ 13,00. Quem tem menos reais? Quantos reais a menos?

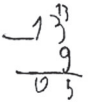
Resolução	Resposta
	Leila tem menos que Cláudio 5 reais

Figura 4.2.6 - Exemplo de erro ao *efetuar a conta* com erro no resultado por algumas unidades.

– Com a situação 13 – comparação de 3ª extensão –, ilustramos o procedimento no qual aparentemente o estudante errou por uma diferença de algumas unidades, seja na adição ou na subtração. O exemplo é da resolução registrada pelo estudante Eri, que armou a operação de subtração, colocou 13 em cima das três unidades, buscando indicar a troca da dezena por unidades, colocou 05 no resto e depois elaborou ao lado a resposta: "Leila tem menos que Cláudio 5 reais". Observe que ele estabeleceu as relações de forma correta. Parece possível afirmar que a única dificuldade encontrada por Eri foi ao efetuar a operação de subtração.

Os resultados apresentados e as observações feitas ao longo do processo de intervenção trouxeram surpresa em relação ao desempenho de estudantes da 3ª série no que diz respeito ao algoritmo da adição e da subtração, bem como no manuseio básico das propriedades inerentes ao sistema de numeração decimal. O alto índice de registros que trazem erros no *cálculo numérico* confirma e

comprova a existência de dificuldades que não deveriam ser peculiares a estudantes desse nível escolar.

Estes resultados vêm corroborar os resultados apontados por Santana e Cazorla (2005), nos quais professores afirmam que, durante as séries iniciais, trabalham enfaticamente com as operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão). Contudo, as autoras indicam que, ao final da 4ª série, os estudantes ainda chegam com grandes dificuldades para resolver tais operações. Comparando as afirmativas colocadas pelas autoras com os resultados aqui encontrados, temos ainda um agravante: os números aqui trabalhados, bem como as suas somas em cada situação não ultrapassam duas dezenas, ou seja, não abordamos nem a ordem das centenas.

A nossa maior surpresa refere-se ao fato de a escola não estar conseguindo sanar tais dificuldades, pois é esperado que estudantes desse nível de escolaridade não as apresentem.

Finalmente, podemos concluir que os erros no *cálculo numérico* são mais incidentes ao efetuar a operação (tanto no pré quanto no pós-teste) e ocorrem de forma mais constante nas resoluções das situações-problema de comparação. Esta relação parece estar atrelada à complexidade peculiar dessa categoria. De um modo geral, era esperado que ocorresse uma queda mais acentuada no MD, visto que este grupo contou com o apoio constante do material manipulativo para a realização das operações ao longo de toda a intervenção, todavia isto não ocorreu, e deixou questionamentos em relação ao "mito" criado em relação ao uso do material manipulativo.

Chega a ser consenso no meio educacional que material manipulativo auxilia o estudante a se apropriar dos

algoritmos das operações, porém este estudo mostra que não precisa ser necessariamente um material manipulativo, pois o material representacional fez o mesmo papel e trouxe resultado similar. O uso do material manipulativo e o uso do material representacional parecem se equivaler dentro das condições e da realidade trabalhada. Santana (2008) apresenta parte dos resultados do estudo que se refere ao piloto de sua tese e nele aponta para o mesmo caminho, pois não existiram diferenças significativas no desempenho das duas turmas envolvidas no estudo; além disso, os dois tipos de material utilizados trouxeram vantagens na criação de significados para as crianças. Na sequência, observamos o erro no *cálculo relacional*.

3. **Erro no *cálculo relacional*** – nesta variável, foram classificados os procedimentos que se referem às "operações do pensamento" voltadas para a Estrutura Aditiva. Eles estão diretamente relacionados à formação e ao desenvolvimento dos conceitos que pertencem a essa estrutura e, por isso, o porquê de analisá-los detalhadamente. Tais procedimentos foram elucidados a partir dos esquemas utilizados pelos estudantes em suas resoluções. Foi possível identificar seis diferentes procedimentos errôneos adotados, que foram: uso da *operação inversa*; uso do *"cálculo mental"*; desconsideração de *números por extenso*; *tratamento da comparação como composição*; *resolução pela metade*; *repetição do enunciado*.

Dentre os tipos de erro classificados (*incompreensível*, *cálculo numérico*, *cálculo relacional* e *em branco*), o *cálculo relacional* foi o mais frequente. A Tabela 4.2.2, a seguir, apresenta a quantificação dos erros no *cálculo relacional,* separando-os por grupo, pelos procedimentos e por teste.

Tabela 4.2.2 - Quantidade de erros no *cálculo relacional* no pré e pós-teste, por grupo

Grupo \ Erro	*Cálculo Relacional*: procedimentos	Pré	Pós
MD	uso *operação inversa*	129	79
	uso *"cálculo mental"*	20	5
	desconsideração do *nº por extenso*	10	0
	comparação como composição	6	1
	resolução pela metade	12	10
	repetição do enunciado	9	6
	Total	186	101
DV	uso *operação inversa*	74	56
	uso *"cálculo mental"*	2	0
	desconsideração do *nº por extenso*	0	0
	comparação como composição	3	0
	resolução pela metade	21	16
	repetição do enunciado	17	1
	Total	117	73

A Tabela 4.2.2 mostra uma queda no número de erros do tipo *cálculo relacional* de pouco mais que 1/3, em ambos os grupos, do pré para o pós-teste, números que revelam uma queda tímida quando comparada com a queda apresentada nos demais tipos de erro. Na sequência, serão descritas e analisadas as seis subdivisões para o erro no *cálculo relacional*:

Uso da *operação inversa:* quando foi feita a troca da adição pela subtração ou vice-versa. Este procedimento foi, de longe, o mais frequente nos dois testes (pré e pós) e nos dois grupos, o que equivale a afirmar que, de todos os procedimentos, este foi o mais observado nos testes.

A primeira informação que precisa ser fornecida é que esse tipo de procedimento foi registrado, em sua quase tota-

lidade, nas situações-problema em que havia incongruência entre a operação a ser utilizada e uma ou mais palavras contidas no seu enunciado. Isto aconteceu em seis situações-problema (2, 6, 7b, 8, 10 e 18), e mais, três delas (6, 8 e 10) eram de comparação de 4ª extensão. Assim, vemos dois fatores de grande relevância – a influência da "palavra-dica" e a complexidade da situação – contribuindo para a existência e persistência de um procedimento errôneo.

A Figura 4.2.7 traz um exemplo com a resposta registrada pela estudante Gal na situação-problema 10, que é de comparação de 4ª extensão.

Problema 10. Paulo tem 14 gibis. Sabendo que Paulo tem 6 gibis a mais que Jonata, quantos gibis tem Jonata?

Resolução	Resposta
$\begin{array}{r} 14 \\ +\ 6 \\ \hline 20 \end{array}$	ele tem 20 gibis.

Figura 4.2.7 - Exemplo da variável erro no *cálculo relacional* no uso da *operação inversa*, cometido por Gal na situação 10.

É pertinente observar que, na situação 10, existe incongruência entre a expressão "*a mais*" e a operação a ser realizada na resolução – subtração. Na resolução, Gal, ao invés de subtrair seis gibis que Paulo tem a mais que Jonata, ela adicionou. É possível que Gal não tenha compreendido que Jonata tem seis gibis a menos que Paulo. Essa compreensão pode ter sido influenciada pela expressão "*a mais*", levando Gal a adicionar 14 com 6, respondendo "Ele tem 20 gibis." Estas são apenas suposições sobre os reais pensamentos empregados por Gal. Dos estudantes

que erraram (20 de 32 no pré e 15 de 17 no pós), a maior parte, teve o mesmo procedimento que Gal na situação-problema 10, mostrando ser esta uma tendência geral de dificuldade para este tipo de situação.

Pelas observações feitas, um comportamento que despertou atenção foi a queda na taxa de acertos do pré para o pós-teste nas situações-problema 6 e 17 no grupo MD. O aumento dos erros, em ambas as situações, ocorreu pela escolha da *operação inversa*. No pré-teste, foram 5 repetições desse tipo de erro (4 na situação 6, e 1 na 17) e, no pós-teste, foram 18 (14 na situação 6, e 4 na 17). Assim, as taxas de acertos dessas duas situações caem consideravelmente após a intervenção. Vejamos as resoluções do estudante Mar para as duas situações no pós-teste, apresentadas na Figura 4.2.8.

Problema 6. Daniel tem dinheiro para comprar um livro e Vinícius tem R$ 7,00 a menos que Daniel. Sabendo que Vinícius tem R$ 13,00, quantos reais tem Daniel?

Resolução	Resposta
13 - 7 6	Daniel tem 6 reais

Problema 17. Juliana tinha 10 maçãs e ganhou 4 maçãs de sua prima. Quantas maçãs Juliana tem agora?

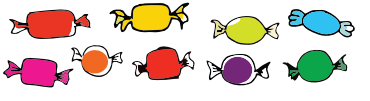
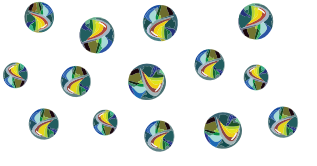
Resolução	Resposta
10 - 4 6	Juliana tem 6 maçãs

Figura 4.2.8 - Exemplo da variável erro no *cálculo relacional* no uso da *operação inversa*, observado o registro do estudante Mar nas situações 6 e 17 do pós-teste.

No pré-teste, o estudante Mar repetiu este tipo de procedimento (operação inversa) oito vezes, porém resolveu corretamente as situações 6 e 17. No pós-teste, ele acertou as outras oito situações que havia errado no pré, mas errou as duas colocadas acima (e que havia acertado no pré). Observe que, além do algoritmo da subtração, Mar não realizou qualquer outro tipo de registro na resolução (o mesmo aconteceu no pré-teste), o que dificulta o levantamento de inferências sobre os esquemas utilizados pelo estudante. Contudo, na situação 6, que é uma comparação de 4ª extensão, a colocação da expressão "a menos", no enunciado, pode ter influenciado na escolha da operação de subtração. Observe que "a menos" indica a relação entre Daniel (referente) e Vinícius (referido), mas a operação que deve ser feita é a inversa da relação estabelecida entre referente e referido, a adição. No caso da situação 17, que é uma transformação protótipo, não é possível fazer inferências.

Finalmente, podemos afirmar que, no pós-teste, houve uma queda na repetição do procedimento com uso da *operação inversa*; este procedimento mostrou-se persistente nas situações que apresentaram incongruência entre uma palavra do enunciado e a operação a ser realizada, e de maneira corrente nas situações de comparação de 4ª extensão. Dessa forma, parece possível inferir que é preciso um trabalho mais específico no sentido de se buscar sanar este tipo de dificuldade dos estudantes.

Uso do *"cálculo mental":* foram classificados os procedimentos em que o estudante aparentemente usou o "*cálculo mental*" para encontrar o resultado correto da situação-problema e, de posse desse valor, fez uma outra operação (agora registrada no papel) utilizando-se desse valor e de

Situação-problema 2	Situação-problema 5	Situação-problema 8
Fátima tem lápis de cor no seu estojo; deu alguns para sua colega, e ficou com 13 lápis. Veja o desenho dos lápis que Fátima deu. *Os lápis que Fátima deu.* Quantos lápis Fátima tinha antes?	Carmem e Regis têm bombons. Veja o desenho abaixo.  *Os bombons de Carmem.* Regis tem 4 bombons a mais que ela. Quantos bombons tem Regis?	Artur e Everton participaram de um jogo de gudes. No final do jogo, Artur ficou com as gudes que estão desenhadas abaixo.  *As gudes que ficaram com Artur.* Sabendo que Artur tem 6 gudes a mais que Everton, com quantas gudes ficou Everton?

Quadro 4.2.1 - Situações-problema pictóricas nas quais foi registrada a maior incidência de erros no *"cálculo mental"*.

mais algum número do enunciado, obtendo um novo resultado, o qual passou a ser a resposta à situação-problema.

Esse tipo de procedimento ocorreu de forma mais recorrente nas situações-problema pictóricas (situação 2, que é uma transformação de 4ª extensão; situação 5, que é uma comparação de 2ª extensão; e situação 8, que é uma comparação de 4ª extensão). Estas situações têm em comum a apresentação de uma determinada quantidade com a representação figural, sendo que a situação-problema 2 é uma relação dinâmica e nas demais situações trata-se de uma medida. O Quadro 4.2.1 mostra as três situações.

Observe que as representações pictóricas seguem uma mesma estrutura. Isto nos levou a levantar uma suposição: a de que os estudantes, diante desta forma de apresentação da situação, tendem a fazer as relações "mentalmente" e para formalizar um algoritmo na resolução usam o valor encontrado com o *"cálculo mental"*, incorrendo no erro.

A Figura 4.2.9 traz a resolução registrada no pré-teste da estudante Fane na situação-problema 8.

A estudante Fane coloca, na resolução, uma adição com as parcelas 8 e 6. A primeira parcela é a quantidade de gudes de Everton, que é a resposta à pergunta, e a segunda parcela (6) é a quantidade de gudes que Artur tem a mais que ele. Observe que Fane não fez nenhum outro registro que permita identificar como encontrou o valor 8, o que nos fez supor que a estudante utilizou o *"cálculo mental"* para encontrar este valor. Parece possível inferir que os estudantes não conseguiram interpretar corretamente o que foi pedido, assim, não compreenderam que o valor encontrado "mentalmente" é a resposta da situação-problema, recorrendo a um novo tipo de cálculo para buscar tal resposta.

Problema 8. Artur e Everton participaram de um jogo de gudes. No final do jogo, Artur ficou com as gudes que estão desenhadas abaixo.

As gudes que ficaram com Artur.

Sabendo que Artur tem 6 gudes a mais que Everton, com quantas gudes ficou Everton?

Resolução	Resposta
8 +6 14	Artur ficou com 14 bolas de gude e everton ficou com 6 bolas de gude

Figura 4.2.9 - Exemplo do erro no uso do *"cálculo mental"*.

A intervenção de ensino parece ter contribuído de forma positiva para sanar este tipo de dificuldade, pois os estudantes do grupo DV não mais registraram este tipo de erro, e no grupo MD ele se repetiu apenas 5 vezes. A seguir, as observações sobre os erros quando parecem ter desconsiderado o *número por extenso*.

Desconsideração de números por extenso: foram classificados os procedimentos nos quais os estudantes operaram apenas com os números da situação-problema que estavam em forma de algarismos, sendo que, em problemas pictóricos, não fizeram a contagem de objetos, necessária para a resolução.

Pela Tabela 4.2.2, este procedimento ocorreu 10 vezes no pré-teste do grupo MD. Vale ressaltar que ocorreu em

quatro situações-problema (2, 4, 5 e 8) do teste, sendo três situações-problema pictóricas (2, 5 e 8) e uma não pictórica, e foi exatamente nas situações que apresentam dois tipos diferentes de registro para os números que representavam as quantidades. Vejamos: com algarismo e figuras (situação 2, 5 e 8), com algarismo e por extenso (situação 4), o que nos levou a levantar uma suposição: a de que os estudantes tinham dificuldades para lidar com dois tipos de registro que representavam as quantidades numa mesma situação.

A Figura 4.2.10 apresenta a resolução registrada pelo estudante Igo na situação-problema 4 (composição de 1ª extensão), a que teve a maior repetição (4) deste tipo de procedimento na resolução.

Problema 4. Um aquário tem 13 peixes de cor dourada e de cor cinza. Cinco peixes são dourados. Quantos são os peixes cinza?

Resolução	Resposta
$\begin{array}{r} 13 \\ +\ 13 \\ \hline 26 \end{array}$	No aquário havia 26 peixes.

Figura 4.2.10 - Exemplo do erro ao *desconsiderar o número por extenso*, cometido por Igo, na situação 4 do pré-teste.

Observe que Igo faz uma adição colocando 13 nas parcelas; ele não considera o número cinco que foi colocado por extenso. Diante disso, surge outra suposição que pode explicar este tipo de erro: os estudantes parecem buscar apenas as quantidades expressas com algarismos para esquematizar a resolução.

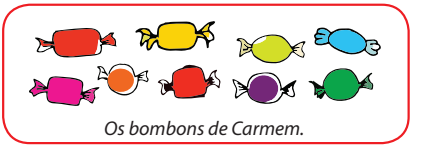
A falta de registro deste tipo de erro no pós-teste dos grupos nos permite inferir que a intervenção de

ensino ajudou de forma positiva para que os estudantes não mais registrassem este erro. A seguir, as observações sobre os erros registrados no *tratamento da comparação como composição*.

Tratamento da comparação como composição: foram classificados os procedimentos nos quais os estudantes deixam de comparar as quantidades para compor um todo. Pela Tabela 4.2.2, observa-se que este erro ocorreu 9 vezes no pré-teste (6 no grupo MD, e 3 no DV) e apenas uma vez no pós-teste do grupo MD.

A maior incidência (8) deste tipo de procedimento foi na situação-problema 5, que é comparação de 2ª extensão. Os estudantes apresentaram exatamente o mesmo esquema de resolução. A Figura 4.2.11 traz como exemplo a resolução feita pela estudante Tati em seu pré-teste.

Problema 5. Carmem e Regis têm bombons. Veja o desenho abaixo.



Os bombons de Carmem.

Regis tem 4 bombons a mais que ela. Quantos bombons tem Regis?

Resolução	Resposta
$\begin{array}{r} 4 \\ +5 \\ \hline 9 \end{array}$	Regis tem 4 bombons e Carmem 5 bombons, ao todo deu 9.

Figura 4.2.11 - Exemplo do erro no *cálculo relacional* no *tratamento da comparação como composição*, cometido por Tati na situação 5.

O esquema de resolução apresentado na Figura 4.2.11 foi o mesmo em 9 testes (8 no pré, e 1 no pós). Observe que Tati registrou na resolução uma adição com as parcelas 4 e 5, e o total 9, e enfatiza, em sua resposta, a necessidade da existência de duas partes, uma para Regis e outra para Carmem, e um todo no qual junta as partes: "Regis tem 4 bombons e Carmem 5 bombons, ao todo deu 9". Mesmo fazendo o mesmo algoritmo, os estudantes chegaram a diferir na resposta final para a situação, sendo que parte escreveu do mesmo jeito que Tati e parte colocou "Regis tem 9". Como a colocação da situação inicia afirmando que Carmem e Regis têm bombons, os estudantes podem ter deixado de considerar que os bombons do desenho são apenas de Carmem e, além disso, não consideraram a expressão "a mais que ela"; dessa forma, consideraram que Regis tem 4 bombons e que o desenho ilustra os bombons de Carmem e Regis juntos, ou seja, Regis tem 4 e Carmem tem 5 para formar um todo que é de 9 bombons. Como a tendência é colocar a resposta da operação realizada, colocaram 9 para Regis, respondendo à pergunta feita na situação. Todavia, estas são apenas suposições sobre os pensamentos dos estudantes. Vale ressaltar que, de acordo com os resultados do pré-teste, o raciocínio de composição protótipo era o que se encontrava mais desenvolvido nos estudantes, o que talvez tenha impulsionado a aplicação de um esquema de composição para resolver a situação quando esta apresentava maior dificuldade.

O estudante do grupo MD, que repetiu este tipo de erro na situação 5, do pós-teste, usou em quase todas as suas resoluções, ao longo dos instrumentos, um esquema pautado na busca pelo complementar, o que deve ter impulsionado ainda mais o raciocínio pela busca do todo.

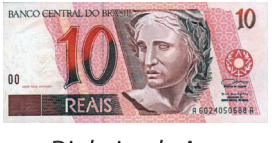
Finalmente, os resultados parecem indicar que a intervenção de ensino colaborou positivamente para diminuir a incidência deste erro, haja vista a falta de repetições no pós-teste. Na sequência, seguem as observações dos erros *resolução pela metade*.

Resolução pela metade: foram classificados procedimentos cuja situação requeria mais de uma operação e o estudante efetuou apenas uma, colocando como resposta o resultado parcial encontrado.

Pela Tabela 4.2.2, este procedimento ocorreu 33 vezes no pré-teste (12 no grupo MD, e 21 no DV) e no pós-teste foram 26 (10 no MD, e 16 no DV).

Este procedimento foi mais recorrente na situação-problema 7b, comparação de 3ª extensão (pré-teste 12 vezes e pós 8) e na 16, que é composição de várias transformações (pré-teste, 18 vezes, e pós, 18), sendo quase que peculiares as situações nas quais se precisa fazer mais de uma operação. O Quadro 4.2.2 mostra essas duas situações da forma como foram colocadas no pós-teste.

Observe o Quadro 4.2.2 para resolver a situação 7b. O estudante precisava compreender que Tânia tinha R$10,00 mais R$2,00, daí ele precisava adicionar 10 com 2 e depois comparar a quantia de Tânia (R$12,00) com a de Ana (R$10,00) subtraindo 10 de 12, verificando que Tânia poderia comprar 2 caixinhas de doce a mais que Ana. Consideramos que a primeira operação seria a adição de 10 e 2 e a segunda seria a subtração de 12 menos 10. Já a situação 16 requeria três operações, sendo uma para adicionar as transformações positivas (3+2+4), outra para adicionar as operações negativas (3+2) e uma terceira para subtrair as transformações negativas das positivas (9-5).

Situação-problema 7b pós-teste	Situação-problema 16 – pós-teste
Ana e Tânia têm dinheiro para comprar caixinhas de doces para dar a seus amigos. O desenho abaixo mostra quantos reais cada uma tem. Cada caixinha de doce custa R$1,00.  *Dinheiro de Ana* *R$ 1,00* *Dinheiro de Tânia* a) Quem pode comprar mais caixinhas de doce? b) Quantas caixinhas de doce a mais ela pode comprar?	Renata tem uma coleção de cartões. Ela ganhou 3 cartões de sua mãe, 2 de sua amiga e 4 cartões de sua prima. Renata resolveu dar 3 dos seus cartões repetidos para sua colega Camila e 2 para seu tio Eduardo. Descontando os cartões que Renata deu, em quanto aumentou os cartões de Renata?

Quadro 4.2.2 - Situações-problema nas quais foi registrada a maior incidência de erros na *resolução pela metade.*

A Figura 4.2.12 traz um dos esquemas de resolução mais utilizados pelos estudantes na situação 16. Vejamos um exemplo com a resolução registrada pela estudante Cari em seu pós-teste.

Figura 4.2.12 - Exemplo do erro no *cálculo relacional* com a *resolução pela metade* cometido pela estudante Cari na situação 16 no pós-teste.

Problema 16. Renata tem uma coleção de cartões. Ela ganhou 3 cartões de sua mãe, 2 de sua amiga e 4 cartões de sua prima. Renata resolveu dar 3 dos seus cartões repetidos para sua colega Camila e 2 para seu tio Eduardo. Descontando os cartões que Renata deu, em quanto aumentou os cartões de Renata?

Resolução	Resposta
$\begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ +\ 4 \\ \hline 9 \end{array}$	Aumentou em 9 cartões.

Figura 4.2.12 - Exemplo do erro no *cálculo relacional* com a *resolução pela metade* cometido pela estudante Cari na situação 16 no pós-teste.

De fato, a estudante Cari apenas fez a adição das transformações positivas, e deixou de se referir às transformações negativas e à subtração entre elas, colocando o valor das transformações positivas como resposta para a situação. A maior parte dos estudantes que fez este procedimento realizou da mesma forma que Cari. Supomos que os estudantes, além de não compreenderem a situação, por não terem sido apresentados os estados inicial e final da quantidade de cartões da coleção de Renata, se detiveram a uma parte da pergunta "[...] em quanto aumentou os cartões de Renata?". Dessa forma, deram importância apenas à transformação positiva na quanti-

dade de cartões, sem considerar a transformação negativa. Contudo, são apenas suposições sobre o raciocínio utilizado pelos estudantes.

Enfim, apesar de a incidência do erro *resolução pela metade* diminuir após a intervenção, a queda não ocorreu de forma satisfatória. As observações realizadas indicaram que a dificuldade em compreender que era preciso realizar mais de uma operação é o que mais dificultou o bom desempenho dos estudantes na categoria composição de várias transformações. Em resumo, a resolução pela metade é um erro que está mais ligado à categoria composição de várias transformações, isto quando a situação apresentar mais de uma transformação positiva e, ou negativa. Na sequência, a análise do erro *repetição do enunciado*.

Repetição do enunciado: foram classificados os procedimentos nos quais os estudantes registraram como resposta um dos valores expressos no enunciado sem efetuar operações ou efetuando alguma operação que não corresponde à resposta registrada.

Pela Tabela 4.2.2, este erro ocorreu 26 vezes no pré-teste (9 vezes no grupo MD, e 17 no DV) e 7 no pós-teste (6 vezes no grupo MD, e 1 no DV).

A Figura 4.2.13 exemplifica as formas de registro dos procedimentos (com ou sem o registro de operações) que foram classificados como erro de *repetição do enunciado*. São as respostas dadas pela estudante Tati na situação 7b (comparação de 3ª extensão) e pelo estudante Ueri na situação 8 (comparação de 4ª extensão).

No pré-teste, a repetição deste tipo de erro se deu de forma quase que homogênea ao longo das situações apresentadas, sem grandes incidências em determinada

Problema 9. Ana e Tânia têm dinheiro para comprar caixinhas de doces para dar a seus amigos. O desenho abaixo mostra quantos reais cada uma tem.
Cada caixinha de doce custa R$1,00.

Dinheiro de Ana

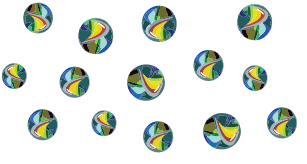
R$ 1,00

Dinheiro de Tânia

a) Quem pode comprar mais caixinhas de doce?
b) Quantas caixinhas de doce a mais ela pode comprar?

Resolução	Resposta
12 - 10 02	Tânia. Ela pode comprar a mais 12 caixinhas de doces.

Problema 8. Artur e Everton participaram de um jogo de gudes. No final do jogo, Artur ficou com as gudes que estão desenhadas abaixo.



As gudes que ficaram com Artur.

Sabendo que Artur tem 6 gudes a mais que Everton, com quantas gudes ficou Everton?

Resolução	Resposta
	14

Figura 4.2.13 - Exemplo do erro no *cálculo relacional* com a *repetição do enunciado* cometido pela estudante Tati na situação 7b e pelo estudante Ueri na situação 8.

situação. Na Figura 4.2.13, a resposta dada por Ueri à situação 8 apresenta o tipo de procedimento mais registrado pelos estudantes que fizeram o erro com a *repetição do enunciado* no pré-teste, ou seja, os estudantes apenas repetiram uma das quantidades do enunciado. Observe que Ueri apenas repetiu 14, que é a quantidade de gudes de Artur, sem realizar qualquer outro tipo de registro. A variabilidade dos números colocados como resposta pelos estudantes dificultou realizar qualquer tipo de inferência sobre o raciocínio implementado para tal escolha. Todavia, no pós-teste, o erro na *repetição do enunciado* ocorreu praticamente na situação 7b (5 repetições), e os estudantes fizeram o mesmo tipo de registro. Observe que Tati fez uma operação para determinar a relação entre a quantidade de dinheiro de Ana e Tânia, colocou como resposta para a primeira pergunta "Tânia"; fez uma linha horizontal que parece ter o objetivo de separar as respostas das duas perguntas, e colocou como resposta à segunda pergunta (7b): "Ela pode comprar a mais 12 caixinhas de doces." Este procedimento nos levou a supor que os estudantes compreenderam a pergunta - (b) Quantas caixinhas de doce a mais ela pode comprar? - como sendo a quantidade de caixinhas de doce total que Tânia pode comprar, e não a quantidade que ela pode comprar a mais que Ana. São apenas suposições sobre o raciocínio que os estudantes empregaram para resolver a situação.

Finalmente os resultados parecem indicar que a intervenção de ensino colaborou positivamente para diminuir a incidência do erro *repetição do enunciado*, visto que, no pré-teste, este procedimento se repetiu em várias situações e, no pós-teste, ela se concentra basicamente

numa única situação. A continuação desse tipo de erro no pós-teste pode ter sido induzida pela complexidade inerente à estrutura da própria situação (comparação de 3ª extensão pictórica). De fato, conforme colocado na discussão do Capítulo 1, nessa extensão, busca-se o valor da relação entre duas medidas dadas e, em geral, não fica explícito que grupo é o referente e que grupo é o referido. Para resolver tal situação, o estudante precisa realizar uma subtração ou usar o raciocínio complementar. Os resultados encontrados neste estudo corroboram os apresentados por Magina et al. (2001), nos quais os estudantes demonstraram ter o mesmo nível de dificuldade.

Na sequência, seguem as observações das respostas deixadas em *branco*.

4. **Em branco** – nesta variável, foram classificadas as ausências de procedimentos, isto é, as resoluções das situações-problema nas quais os estudantes não realizaram registros.

Das variáveis de análise (*incompreensível*, *cálculo numérico*, *cálculo relacional* e *em branco*), a *em branco* foi a que praticamente deixou de ser utilizada pelos estudantes após a intervenção de ensino. No total, foram 60 repetições no pré-teste (24 no grupo MD, e 36 no DV) e 2 no pós-teste (1 no grupo MD, e 1 no DV).

Diante dos resultados, é possível afirmar que a acentuada queda na incidência de ausência de procedimentos na resolução das situações-problema no pós-teste parece indicar que a *intervenção* de ensino contribuiu para que os estudantes conseguissem registrar de forma mais coerente seus esquemas de resolução para as situações apresentadas. Na sequência, uma síntese da análise qualitativa feita até aqui.

4.2.1.2 Síntese da primeira fase da análise qualitativa

A primeira fase da análise qualitativa foi dedicada à observação das resoluções feitas pelos estudantes nos instrumentos diagnósticos (pré e pós-testes) com situações-problema aditivas. Essa análise revelou que os estudantes cometem quatro tipos de erros: *incompreensível*; *cálculo numérico*, *cálculo relacional*, *em branco*.

A maior incidência de erros, mesmo após a intervenção de ensino, foi observada no *cálculo relacional*. É possível afirmar que a intervenção de ensino apresentou efeitos qualitativos positivos no desempenho desses estudantes, pois cada um dos erros categorizados a partir das observações dos instrumentos, apresentou queda considerada relevante após o processo de intervenção. É possível afirmar ainda que, embora alguns estudantes continuassem a apresentar erros após a intervenção, a qualidade desses erros mudou, já que os procedimentos adotados por eles no pós-teste baseavam-se em esquemas de ações relacionados ao acerto. Um dado que reforça esta afirmativa é que os erros – *incompreensível* e *branco* – praticamente deixam de existir no pós-teste.

Outra constatação advinda dessa análise são os indícios de estreita relação entre os tipos de erros, com seus respectivos procedimentos, e as categorias, extensões e, ou contextos de situações-problema. Vejamos uma síntese dessas relações no Quadro 4.2.3.

A partir desta análise, surge um importante questionamento: seriam estas relações mantidas nos procedimentos que se referem às atividades durante a intervenção de ensino? A fase dois da análise qualitativa, apresentada a seguir, busca responder a este e a outros tipos de questionamento.

Teste	Incompreensível	Cálculo numérico	Cálculo relacional
Pré	No geral, com a categoria composição de 1ª extensão pictórica.	No geral, com a categoria comparação.	*Uso do "cálculo mental"* – situações pictóricas com contagem de elementos.
		Ao armar a conta – situações com mais de uma operação.	*Tratamento da comparação como composição* – situações de comparação de 2ª extensão.
			Resolução pela metade – situação composição de várias transformações.
			Repetição do enunciado – situações de comparação de 3ª extensão.
			Operação inversa – situações de comparação de 4ª extensão.
Pós			*Operação inversa* – situações de comparação de 4ª extensão. *Resolução pela metade* – composição de várias transformações.

Quadro 4.2.3 - Relação dos tipos de erro com as categorias e extensões no pré e pós-testes.

4.2.2 Análise das atividades de casa

Esta é a segunda fase da análise qualitativa e será centrada nas resoluções das atividades levadas pelos estudantes para serem respondidas em casa. Os erros nas atividades do grupo MD são similares aos dos instrumentos (pré e pós-testes), sendo, portanto, classificados como *incompreensível*, *cálculo numérico*, *cálculo relacional* e *em branco*. Já os erros observados no grupo DV diferem um pouco, pois surgiram procedimentos de erros atrelados ao *uso do diagrama*. Na sequência, realizamos a análise das resoluções feitas pelos estudantes do grupo MD e depois do grupo DV.

4.2.2.1 Análise dos erros detectados nas atividades de casa do grupo MD

Foram analisados os tipos de erro e os respectivos procedimentos registrados no caderno de atividades dos estudantes do grupo MD. Foram observados quatro grandes tipos de erro: *incompreensível*, *cálculo numérico*, *cálculo relacional* e *em branco*. Vejamos, a seguir:

1. **Erro *incompreensível*** – Foi observado apenas um esquema de resolução com este tipo de erro.

O estudante Edu realizou este erro na atividade do segundo encontro nos procedimentos para a resolução da primeira situação-problema, uma composição de 1ª extensão. A Figura 4.2.14 mostra o procedimento adotado por ele na resolução da situação.

Edu colocou o valor 3,00 na etiqueta que servia para indicar o valor do carrinho de brinquedo, e também usou

este mesmo número para fazer uma operação de subtração. Observe que o resultado da operação parece ser 09, mas ele colocou como resposta: “Renata ficou com 4 reais”. Os números 3 e 4, utilizados por Edu, “parece” que não apresentam ligação com a situação-problema. Como não é possível fazer inferências sobre as verdadeiras relações de pensamento feitas por Edu, classificamos o erro como *incompreensível*.

1º) Renato pagou R$ 19,00 na compra de uma moto e um carrinho de brinquedo.
Veja a ilustração abaixo, com o preço da moto.

R$ 12,00

3x0 0

Quanto custou o carrinho?

Resolução	Resposta
12 − 3 09	renato ficou com 4 reais

Figura 4.2.14 - Exemplo de erro *incompreensível* cometido por Edu na atividade do 2º encontro.

Acreditamos que a falta de procedimentos com registros que impossibilitassem uma análise das relações estabelecidas pelos estudantes foram decorrentes de fatores como: as atividades propostas para casa tinham a mesma estrutura das situações-problema que foram trabalhadas em sala de aula; os estudantes podiam contar livremente com a ajuda de outras pessoas, no caso de terem alguma dúvida; e o tempo disponível para a resolução das atividades. A seguir, observações sobre o erro no *cálculo numérico*.

2. **Erro no *cálculo numérico*** – No total, foram 17 erros no *cálculo numérico*. Assim como nos instrumentos (pré e pós-teste), a maior incidência foi ao *efetuar a conta* com 15 repetições. Os erros *armar a conta* e na *contagem* ocorreram apenas uma vez.

Em resumo, os erros no *cálculo numérico*, registrados pelos estudantes do grupo MD nas atividades de casa, são erros diferenciados dos apresentados no pré-teste, sendo similares aos procedimentos observados no pós-teste. Os estudantes deixaram de cometer erros do tipo: armar a conta colocando o valor das unidades na ordem das dezenas, colocar todos os algarismos na ordem das unidades, ou armar a conta de subtrair com o minuendo menor que o subtraendo, já a partir do primeiro encontro de intervenção. Contudo, assim como nos instrumentos, os erros do tipo *cálculo numérico* nas atividades de casa foram mais reincidentes nas situações-problema de comparação.

3. **Erro no *cálculo relacional*** – dos tipos de erro observados nas atividades de casa, o mais frequente foi do *cálculo relacional*. Foi possível identificar quatro diferentes procedimentos adotados pelos estudantes do grupo MD, a saber, uso da *operação inversa*; uso do *"cálculo mental"*; *tratamento da comparação como composição*; e *resolução pela metade*.

No total, foram 85 resoluções classificadas como erro no cálculo relacional. Desses 85, seis ocorreram com o uso do *"cálculo mental"*, sem que fosse identificada uma relação direta deles com alguma das categorias de situações-problema; três foram *tratamento da comparação como composição*, todos em situações de comparação de 4ª extensão; quatro com *resolução pela metade*, todos na

situação composição de várias transformações; e 72 em procedimentos com uso da *operação inversa*.

Assim como nos testes, a troca da operação foi o procedimento de erro mais efetuado pelos estudantes do grupo MD. Também, da mesma forma, este tipo de procedimento foi mais incidente nas situações-problema de comparação de 4ª extensão, nos quais consta a incongruência entre a "palavra-dica" e a operação a ser realizada. Porém esse procedimento também apareceu, embora com menor incidência, nas situações-problema de transformação de 1ª extensão, quando o valor do estado final era maior do que o do estado inicial e por isso havia incongruência. Dos 72 erros, 35 aconteceram em situações que apresentavam essa incongruência – 26 em duas situações de comparação de 4ª extensão e 9 em duas situações de transformação de 1ª extensão.

A Figura 4.2.15 apresenta um exemplo do tipo de erro no *cálculo relacional* no procedimento uso da *operação inversa*, cometido pelo estudante Ueri, ao resolver uma comparação de 4ª extensão, no sétimo encontro.

Observe que Ueri armou e efetuou a operação de subtração corretamente, e colocou como resposta – "Marcos tem 14 reais."

Ele parece ter compreendido que Marcos teria R$ 5,00 a menos que Júlio. Essa compreensão errônea pode ter sido influenciada pela palavra "a menos", a qual é incongruente com a operação de adição a ser realizada. Contudo, essas são apenas conjecturas sobre as verdadeiras relações de pensamento utilizadas por ele.

Dentre os procedimentos dos estudantes que fizeram a escolha pela operação inversa, foi comum observar os mesmos esquemas registrados por Ueri na situação da

Figura 4.2.15. Eles faziam corretamente procedimentos de armar, efetuar e elaborar a resposta final, contudo erravam ao escolher a operação.

3º) Júlio e Marcos são amigos e cada um vai comprar uma bola. Júlio tem R$ 19,00 para comprar a bola dele e Marcos tem R$ 5,00 a menos que Júlio. Quantos reais Marcos tem para comprar a bola?

Resolução	Resposta
$\begin{array}{r} 19 \\ -\ 5 \\ \hline 14 \end{array}$	Marcos tem 14 reais.

Figura 4.2.15 - Exemplo de erro no *cálculo relacional* cometido por Ueri na atividade do 7º encontro.

Em resumo, o erro *no cálculo relacional,* observado nas atividades de casa do grupo MD, concentrou-se no procedimento de uso *da operação inversa*. É importante que se informe que o uso de tal procedimento foi diminuindo consideravelmente no decorrer da intervenção.

4. ***Em branco*** – dos tipos de erro observados nas atividades de casa do grupo MD, o procedimento em branco praticamente não existiu.

Comparando o total de erros *em branco* no pré-teste com as atividades de casa do grupo, é possível afirmar que a pouca incidência deles nas atividades indica uma mudança de comportamento dos estudantes ao longo da intervenção, no sentido de passar a ter uma postura de comprometimento para com ela. Dessa forma, as situações-problema deixadas em branco no pré-teste praticamente sumiram nas atividades realizadas tanto em sala de aula quanto em casa. Essa mudança de comportamento é

um forte indício da interferência positiva da intervenção de ensino na motivação e aprendizagem dos estudantes.

4.2.2.2 Análise dos erros detectados nas atividades de casa do grupo DV

Buscando fazer uma análise mais detalhada do uso do material representacional, os erros *cálculo numérico* e *cálculo relacional* foram analisados considerando também a utilização, ou não, desse material nos esquemas de resolução.

Ressaltamos que não foram observados erros *incompreensível* e *em branco*. A seguir, a análise segundo cada tipo de erro:

1. **Erro no *cálculo numérico*** – os estudantes do grupo DV não registraram procedimentos com erros ao *armar a conta* nem tampouco na *contagem* dos elementos pictóricos. Como já afirmado na análise dos erros dos instrumentos, esses dois procedimentos apareceram muito pouco no pós-teste do grupo.

No total, foram 10 erros no *cálculo numérico*, todos observados no procedimento ao *efetuar a conta*. Desses, oito apresentavam os diagramas corretos, e dois os diagramas incorretos.

A Figura 4.2.16 apresenta um exemplo de erro no *cálculo numérico* no procedimento ao *efetuar a conta* com o diagrama feito corretamente, erro identificado na resposta dada pela estudante Ari na atividade do quarto encontro de intervenção, com a situação-problema comparação de 3ª extensão.

Observe que Ari fez o diagrama e armou a operação corretamente, mas ao efetuar a operação subtraiu apenas

a unidade e preservou a dezena. Colocou a resposta: "Alegria. Ela vai pagar R$ 23,00 a menos que."

Fazemos duas suposições positivas. Primeiro, Ari parece ter compreendido as relações entre referente e referido, identificando corretamente qual o supermercado no qual se iria pagar menos. Segundo, ela identifica e arma corretamente a operação.

3º) Mamãe vai comprar uma panela.
Ela está procurando o supermercado onde ela pague menos.
Veja os preços dos supermercados e ajude a mamãe a escolher o menor preço.

Em qual supermercado ela vai pagar menos?
Quantos reais a menos ela vai pagar?

Resolução	Resposta
29 − 26 = 23	Alegria. Ela vai pagar R$ 23,00 a menos que

Figura 4.2.16 - Exemplo de erro no *cálculo numérico* cometido por Ari na atividade do 4º encontro, classificada como comparação de 3ª extensão.

Este tipo de procedimento não apresentou relação com nenhuma das categorias das situações-problema, sendo bem diversa a relação entre o procedimento de erro ao efetuar a operação e a categoria das situações.

Diante dos resultados, é possível afirmar que os estudantes do grupo DV não apresentaram grandes dificuldades no *cálculo numérico*, pois não foram registrados muitos procedimentos com este tipo de erro. Além disso, a maior parte dos estudantes que apresentou esta dificuldade utilizou de forma correta os diagramas das situações-problema propostas. E, ainda, identificou a operação correta. Todavia, faz-se necessário refletir sobre a interferência dos diagramas na resolução correta da situação, pois o estudante, mesmo compreendendo qual o diagrama correspondente para determinada situação e utilizando seu registro de maneira correta, errou ao efetuar o cálculo numérico. Esse comportamento deixa evidente que identificar corretamente o diagrama e a operação não garante sucesso no algoritmo dessa operação. Na sequência, a análise dos erros no *cálculo relacional*.

2. **Erro no *cálculo relacional*** – como foi colocado no Capítulo I, o cálculo relacional refere-se às operações de pensamento e, além disso, tendo como base a Teoria dos Campos Conceituais, para desenvolvê-lo, lança-se mão do quadro de diagramas. Como a intervenção de ensino do grupo DV se apoiou no uso desse material representacional, continuaremos focando a ligação dos erros com o registro ou não dos diagramas.

Dos tipos de erro observados nas atividades de casa do grupo DV, o mais incidente foi no *cálculo relacional*. Identificamos dois diferentes procedimentos adotados pelos estudantes do grupo DV, a saber: a *resolução pela metade*; e uso da *operação inversa*.

No total, foram 69 resoluções classificadas como erro no *cálculo relacional*. Desses 69, cinco com *resolução*

pela metade – sem nenhuma ligação com as categorias de situações-problema; e 64 em procedimentos com uso da *operação inversa*.

Assim como nos testes dos dois grupos e nos cadernos do grupo MD, a troca da operação foi o procedimento de erro mais efetivado pelos estudantes do grupo DV. Este tipo de procedimento foi mais incidente nas situações-problema de comparação de 4ª extensão nas quais consta incongruência entre palavras do enunciado e a operação a ser realizada, e, também, na composição e na transformação de 1ª extensão. Dos 64 erros, 22 foram em situações que apresentavam incongruência, o que mostra uma grande influência da presença de palavras do enunciado que apresentam incongruência com a operação a ser realizada.

A Figura 4.2.17 apresenta um exemplo do tipo de erro no *cálculo relacional* no procedimento de uso da *operação inversa*, na atividade do 5º encontro uma comparação de 4ª extensão, cometido pelo estudante Bri.

Bri fez o diagrama de forma correta, porém armou a operação de adição ao invés da de subtração.

Ele parece não ter compreendido que a operação a ser realizada era a inversa da relação entre referente e referido. Para determinar a quantidade do referente, era necessário fazer uma subtração. Mais uma vez, levantamos a hipótese de que o estudante fez uso de uma das palavras do texto (a mais) para escolher a operação a ser utilizada.

Todavia, essas são apenas conjecturas sobre as verdadeiras relações de pensamento empregadas por Bri em seus esquemas de resolução.

3º) Mário e Pedro têm carrinhos de brinquedo. Veja na ilustração os carrinhos de Mário.

Carrinhos de Mário

Mário tem 5 carrinhos a mais que Pedro.
Quantos carrinhos tem Pedro.

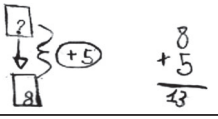
Resolução	Resposta
	Pedro tem 13 carrinhos.

Figura 4.2.17 - Exemplo de erro no *cálculo relacional* cometido por Bri na atividade do 5º encontro, classificada como comparação de 4ª extensão.

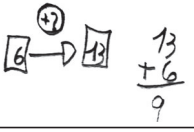
Dos 64 procedimentos com uso da *operação inversa*, quatro foram com o mesmo tipo de erro de Bri (Figura 4.2.17), isto é, usaram o diagrama corretamente, mas erraram na escolha da operação. Nos demais procedimentos (60), os estudantes erraram na escolha pela *operação inversa* e no diagrama – seja na escolha pelo diagrama de outra categoria de situação, seja por distribuir os valores no diagrama de maneira incorreta. A Figura 4.2.18 ilustra esses procedimentos.

A primeira resolução foi dada pelo estudante Val na atividade do terceiro encontro, uma composição de 1ª extensão. Ele usou o diagrama de transformação,

escolheu a *operação inversa*, e ainda efetuou a operação de maneira incorreta, esquecendo-se de adicionar a dezena.

Atividade de casa do 3º encontro

1º) Uma loja tem 13 peças de tecido. São peças coloridas e peças brancas. Seis são peças brancas.
Quantas são as coloridas?

Resolução	Resposta
	São 9 coloridas?

Atividade de casa do 7º encontro

3º) Júlio e Marcos são amigos e cada um vai comprar uma bola. Júlio tem R$ 19,00 para comprar a bola dele e Marcos tem R$ 5,00 a menos que Júlio. Quantos reais Marcos tem para comprar a bola?

Resolução	Resposta
	ele tem para comprar R$ 14,00

Figura 4.2.18 - Exemplo de erro no *cálculo relacional* cometido por Val e por Bia com o uso da *operação inversa*.

A segunda resolução foi dada pela estudante Bia, na atividade do 7º encontro, uma comparação de 4ª extensão. Observe que ela fez o diagrama de comparação. Contudo, trocou o valor do referente pelo do referido (19) e o do referido pela relação (5), e questionou o valor da relação ao invés do referente. Ela efetuou

uma operação inversa, de subtração (19-5=14), porém a estudante apagou o registro da operação, e com o escâner não foi possível evidenciar a sombra deixada. Colocou como resposta final: "ele tem para comprar R$14,00".

Val e Bia tiveram dificuldades no *cálculo relacional* em dois sentidos: na escolha dos diagramas para interpretar a situação e ao escolher a operação inversa. Além disso, Val demonstrou ter dificuldades para efetuar a operação registrada. Bia reconheceu qual era o diagrama da situação-problema, porém demonstrou não ter compreendido o que era referente, referido, nem a relação entre eles. Os esquemas utilizados por Bia para a resolução podem ter sido conduzidos pela incongruência entre a expressão "a menos" e a operação a ser realizada (adição). Os demais estudantes que erraram no mesmo procedimento fizeram registros similares aos feitos por Bia nessa situação.

Em resumo, a análise do uso da *operação inversa* parece trazer alguns indicativos, como:

- mesmo conseguindo utilizar corretamente as relações de pensamento para a construção do diagrama, o estudante pode não conseguir transpor para o cálculo numérico as relações estabelecidas;
- o reconhecimento do diagrama de uma dada situação-problema nem sempre garante a compreensão das relações da estrutura da situação;
- os diagramas podem ajudar na interpretação e compreensão de uma dada situação, mas o seu uso não se mostrou essencial para que o estudante pudesse encontrar a resposta correta.

4.2.2.3 Síntese da segunda fase da análise qualitativa

Na segunda fase da análise qualitativa, foi designada a observação das resoluções feitas pelos estudantes nas atividades de casa. A análise dos cadernos dos estudantes do grupo MD revelou quatro tipos de erros principais: *incompreensível*; *cálculo numérico*, *cálculo relacional*, *em branco*. Já no grupo DV, os tipos de erro resumiram-se a dois: *cálculo numérico* e *cálculo relacional*.

No cômputo geral, a análise revelou que, durante o processo de intervenção, os erros apareceram num meandro de exposição de incidências que mostraram maior compreensão do que estava sendo feito. Erros do tipo *incompreensível* e, ou em *branco* praticamente deixaram de ser registrados à medida que as intervenções se desenvolviam. Além dos efeitos da própria intervenção de ensino, outros fatores podem ter sido preponderantes para esse tipo de comportamento nas resoluções, como, por exemplo: tendo dúvida, o estudante poder contar livremente com a ajuda de outras pessoas em sua casa; e o tempo disponível para a resolução das atividades ser bem maior em relação a esse tempo na escola.

A maior incidência de erros ocorreu no *cálculo relacional* para ambos os grupos. Ao longo da análise, foram detectadas relações entre alguns tipos de erro e seus procedimentos com as categorias das situações-problema. O Quadro 4.2.4 traz, resumidamente, as relações mais evidentes.

Comparando o Quadro 4.2.3, que mostra a relação dos tipos de erro com as categorias e extensões nas situações do pré e pós-testes, com o Quadro 4.2.4 acima, é possível notar as relações estabelecidas nas atividades de casa como um estágio intermediário entre o pré e o pós-teste.

Tipo de erro	Procedi-mento	Categorias no grupo MD	Categorias no grupo DV
Cálculo numérico	----	Comparação	----
Cálculo relacional	*Operação inversa*	Comparação de 4ª extensão. Nas situações que têm incongruência entre palavra do enunciado e a operação.	Transformação de 1ª extensão e comparação de 4ª extensão. Nas situações que têm incongruência entre palavra do enunciado e a operação.
	Resolução pela metade	Composição de várias transformações.	----

Quadro 4.2.4 - Relação dos tipos de erro com as categorias e extensões nas atividades de casa.

Por fim, para todo o processo de intervenção (pré, atividades de intervenção e pós), foram observadas três ligações que ocorreram com mais consistência e regularidade, a saber: o uso da *operação inversa* atrelada a situações que têm incongruência entre palavra do enunciado e um procedimento que se vincula às situações-problema de comparação de 4ª extensão; fazer a *resolução pela metade* é um procedimento peculiar das situações de composição de várias transformações.

Diante das análises e comparações feitas, dois pontos merecem mais um pouco de reflexão: o uso da "palavra-dica" e o uso dos diagramas.

Independente do material didático utilizado, as palavras que parecem indicar a operação a ser realizada

tem muita importância; fica evidente que este uso induz o estudante a escolher a operação. Quando existe incongruência com a operação, torna-se mais fácil observar tal uso do que quando a congruência não fica tão evidente. Ficam aqui alguns questionamentos para reflexão: estamos conduzindo o estudante a interpretar as situações? Estamos desenvolvendo um trabalho de maneira que o estudante domine os conceitos inerentes às situações? O uso da "dica" de certas palavras do enunciado na escolha da operação proporciona o domínio dos conceitos?

Em relação ao uso dos diagramas, ficou evidente que os estudantes usaram-nos com mais constância nas atividades de casa, ou seja, durante o período dos encontros de intervenção. Vale ressaltar que na aplicação do pós-teste do grupo DV, alguns estudantes questionaram: "Tia, tenho que fazer os diagramas?" (informação verbal)[4], e a escolha foi deixada por conta deles: - Faça se você quiser, caso não queira fazer, não faça.

Ante os resultados e as observações realizadas, é possível afirmar que a utilização dos diagramas pode auxiliar na compreensão da estrutura e das relações estabelecidas na situação, mas o uso correto não foi essencial para o desenvolvimento do cálculo numérico ou da elaboração correta da resposta para a situação. Certamente o que mais interferiu no uso incorreto dos diagramas foi a prática memorizada pelos estudantes no uso de pala-

[4] Pergunta feita de forma oral por estudantes do grupo DV, tendo sido as falas registradas na gravação realizada ao longo do encontro de aplicação do pós-teste com o grupo.

vras do enunciado para a escolha da operação, uso que interferiu na ligação entre cálculo relacional – com o uso dos diagramas – e cálculo numérico. Estes resultados corroboram aqueles encontrados por Guimarães (2009), os quais a levaram a afirmar que a presença da "palavra-dica" nas situações de comparação, muito provavelmente, influencia a escolha da operação a ser utilizada. Na última seção deste Capítulo, consta uma discussão mais ampla sobre a influência dessa incongruência entre palavras do enunciado e a operação a ser realizada.

4.2.3 Análise dos esquemas de resolução

Buscamos elucidar os esquemas de resolução que, em geral, não se afiguram como parte do currículo escolar. Além disso, detectar possíveis conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, definidos no Capítulo I, como conhecimentos implícitos dos estudantes contidos em seus esquemas de ação.

Em geral, o esquema inerente ao currículo são os algoritmos. Aqui analisamos esquemas diferenciados que vão além dos algoritmos comumente trabalhados pela escola. Mediante essas condições e buscando alcançar os objetivos propostos, serão analisadas as resoluções registradas nos instrumentos diagnósticos, bem como nas atividades de casa.

Não desconsideramos a possibilidade de que alguns dos esquemas de resolução utilizados pelos estudantes sejam procedimentos errôneos, já apresentados nas duas primeiras fases da análise qualitativa. Isto porque consideramos que procedimentos como uso do *"cálculo mental"* e *tratamento*

da comparação como composição são, sem sombra de dúvida, esquemas de resolução desenvolvidos pelos estudantes. Contudo, nas fases da análise anterior, tais procedimentos foram focalizados do ponto de vista dos erros, enquanto aqui eles serão tratados enquanto esquemas de ação.

4.2.3.1 Diferentes esquemas de ação

Foi possível destacar quatro diferentes esquemas de ação, a saber: uso do *complementar*; uso do *"cálculo mental"*; uso de *contagem*; *tratamento da comparação como composição*. Os referidos esquemas foram mais observados no pré-teste, com pouca ocorrência nas atividades de casa, bem como no pós-teste. Tal queda pode ter sido influenciada pela intervenção de ensino.

O uso de esquemas não ocorreu de maneira excludente; isto significa que, em algumas resoluções, o estudante fez uso de mais de um esquema para chegar à resposta final. A seguir, delineamos, de maneira destacada, cada um.

a) Uso do *complementar*

Diz respeito ao esquema no qual o estudante colocou o valor da resposta da situação como termo da operação registrada na resolução. Esse valor colocado era o complementar de uma das quantias dadas na situação em relação à maior quantia dada.

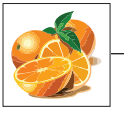
Para melhor compreensão, observe, na Figura 4.2.19, a situação do pré-teste. O estudante armou uma operação com as quantias nove e oito. O valor oito foi dado na situação, e o nove é o complemento de oito (valor dado na situação) em relação a 17.

De um modo geral, esse esquema foi utilizado pelos estudantes dos dois grupos, tanto no contexto de sala de aula como nas atividades de casa, especialmente nas situações-problema de 1ª extensão, com mais constância nas de composição.

Pré-teste

Problema 12. Alberto foi à feira para comprar bananas e laranjas. Ele gastou R$ 17,00 ao todo. Sua mãe quer saber quanto custou cada quantidade de fruta. Veja abaixo quanto ele pagou pelas laranjas.

9,00



R$ 8,00

Quanto ele pagou pelas bananas?

Resolução	Resposta
9 − 8 = 1	fiquei com 1 real

Atividade de casa

1º) Renato pagou R$ 19,00 na compra de uma moto e um carrinho de brinquedo.
Veja a ilustração abaixo, com o preço da moto.

R$ 12,00

R$7,00

Quanto custou o carrinho?

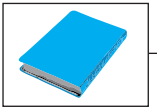
Resolução	Resposta
12,00 + 7,00 = 19,00	o carrinho custou 7,00 R$

(continua)

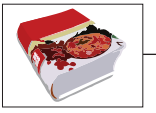
Figura 4.2.19 - Exemplo de esquema com o *uso do complementar*, usado por Brun.

Pós-teste

Problema 12. Alberto comprou um livro e um caderno. Ele gastou R$ 17,00 ao todo. Sua mãe quer saber quanto custou cada objeto. Veja no desenho abaixo quanto ele pagou pelo caderno.



R$ 8,00



9,00

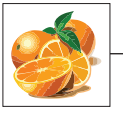
Quanto ele pagou pelo livro?

Resolução	Resposta
9 + 8 17	ele Pagou Pelo Caderno R$ 9,00 reais.

Atividade da entrevista

Problema 12. Alberto foi à feira para comprar bananas e laranjas. Ele gastou R$ 17,00 ao todo. Sua mãe quer saber quanto custou cada quantidade de fruta. Veja abaixo quanto ele pagou pelas laranjas.

R$ 9.00



R$ 8,00

Quanto ele pagou pelas bananas?

Resolução	Resposta
9,00 + 8,00 17,00	Ele Pagou Pelas bananas R$ 9,00.

(conclusão)

Figura 4.2.19 - Exemplo de esquema com o *uso do complementar*, usado por Brun.

A Figura 4.2.19 traz um exemplo da resolução registrada por Brun, numa visão longitudinal: no pré-teste, na atividade de casa, no pós-teste e na entrevista.

Trata-se da situação-problema composição de 1ª extensão. Além disso, são apresentadas as figuras dos

objetos que representam cada uma das partes.

Nota-se que, nas operações registradas por Brun, uma das parcelas é o valor da parte que é procurada, que se configura como o complemento do valor da parte dada em relação ao todo.

Além do uso do *complementar*, o estudante fez uso do "cálculo mental" em todas as situações. Ele encontrou "mentalmente" a parte solicitada, em seguida usou o valor encontrado para fazer a operação. No pré-teste, ele subtraiu os valores, colocou o valor correto na etiqueta e elaborou a resposta errada. Na atividade de casa, no pós-teste e na atividade da entrevista, ele adicionou os valores, colocou o valor correto na etiqueta e elaborou a resposta de forma correta.

O estudante Brun participou da entrevista logo após ter respondido às situações-problema propostas. Segue a transcrição[5] da mesma (informação verbal)[6].

A pesquisadora fez a leitura da situação-problema 12 no pré e no pós-teste, mostrou o que ele fez em ambos os testes, e perguntou:

E: Aqui (pré-teste) você colocou 9,00 no preço da banana e fez a conta 9-8=1. Você lembra por que fez essa conta?

B: Não lembro.

E: E aqui (pós-teste)? Você lembra?

---

[5] Para a transcrição da entrevista, a letra E se refere à fala da pesquisadora, e a B se refere à fala de Brun. Buscando preservar o teor da entrevista, ambas as falas foram transcritas preservando a maneira coloquial.

[6] Perguntas feitas de forma oral pela pesquisadora e respondidas pelos estudantes, tendo sido as falas registradas na gravação realizada ao longo da entrevista. As falas postas entre parênteses são explicações das expressões físicas apresentadas na linguagem corporal.

B: Também não.
E: E nessa que você respondeu hoje (atividade da entrevista)?

Brun parou e ficou pensando.

B: Só sei que peguei 9 reais e 8 reais para dar 17 reais.
E: Por que 9? Por que não colocou outro número?

Ele não conseguiu responder e ficou em silêncio.

E: Vamos passar para outra.

A pesquisadora fez a leitura da situação-problema 18 (no pré-teste), uma transformação de 1ª extensão, que está na Figura 4.2.20 a seguir.

Problema 18. Carlos tinha 4 bolas de gude. Ganhou algumas e agora ele tem 10 bolas de gude. Quantas bolas de gude ele ganhou?

Resolução	Resposta
$\begin{array}{r} +\ 4 \\ 6 \\ \hline 10 \end{array}$	ganhei 6 bolas

Figura 4.2.20 - Esquema usado por Brun na situação 18 do pré-teste.

A pesquisadora perguntou:

E: Você colocou 4+6=10. Como você fez esse problema?

B: Eu botei assim, Carlos tinha 4 bolas e ele ganhou algumas, agora ele tem 10, 6+4 que é igual a 10.
E: E o que você fez para encontrar seis?

Ele parou e ficou pensando.

B: Eu somei aqui para dar 10. Ele tinha 4 bolas e ganhou algumas pra dar 10. Ele já tinha 4 lá, então eu peguei 6 para interar com 4, para dar 10.

A pesquisadora voltou à situação-problema anterior (problema 12 no pós-teste) e perguntou:

E: Então, e aqui?
B: Eu peguei o 9 para interar com 8, para dar 17.
E: Agora entendi o que você fez!

É possível notar, na fala de Brun, a busca pelo complemento do todo; isso fica bem claro quando ele afirma: "[...] eu peguei 6 para interar com 4, para dar 10".

Para certificar ainda mais sobre o esquema de pensamento utilizado por Brun, que faz uso da propriedade do complementar de um conjunto, a pesquisadora continuou a entrevista com ele usando mais uma situação de transformação de 1ª extensão.

A Figura 4.2.21, a seguir, traz as situações-problema que basearam o restante da entrevista com Brun. Foi a situação 2 da atividade de casa do 5º encontro e a situação 6 da atividade da entrevista.

Atividade de casa

2º) Roberto tinha 6 pacotes de figurinhas. E seu tio lhe deu alguns pacotes de figurinhas. Agora ele tem 13 pacotes de figurinhas. Quantos pacotes de figurinhas ele ganhous de seu tio?

Resolução	Resposta
$\begin{array}{r} 6 \\ +\ 7 \\ \hline 13 \end{array}$	Ele ganhou de seu tio 13 figurinhas

Atividade da entrevista

6º) Roberto tinha 42 pacotes de figurinhas. E seu tio lhe deu alguns pacotes de figurinhas. Agora ele tem 106 pacotes de figurinhas.
Quantos pacotes de figurinhas ele ganhou de seu tio?

Resolução	Resposta
$\begin{array}{r} 64 \\ +\ 42 \\ \hline 106 \end{array}$	Ele ganhou de seu tio 64 figurinhas

Figura 4.2.21 - Outros exemplos do esquema com o *uso do complementar*, usado por Brun.

Observa-se, na Figura 4.2.21, que ambas as atividades tratam do mesmo tipo de situação, apenas aumentamos os valores com o objetivo de analisar se os estudantes conseguiriam usar o raciocínio complementar com números mais altos.

Brun usou o mesmo esquema nas duas atividades, contudo, na atividade de casa, ele colocou o estado final, da quantidade de figurinhas, como resposta, e, na atividade da entrevista, ele colocou a resposta de forma correta. A pesquisadora continuou a entrevista com Brun com o objetivo de compreender as relações de pensamento que o levaram a colocar o valor do estado final como resposta

da situação de casa. Vejamos, a seguir, o desenrolar da entrevista.

A pesquisadora fez a leitura da segunda situação-problema da atividade de casa, e perguntou:

E: Está certo?
B: Não. Está errado.
E: E qual é a resposta certa?
B: Ele já tinha 6 e aí ele deu alguns pacotes, aí ficou 13. Aí quantos pacotes o tio dele deu pra ele? O tio dele deu pra ele 7 pacotes de figurinhas.
E: Então o tio dele deu 7 pacotes de figurinhas?

Brun balança a cabeça de forma afirmativa.

E: A resposta que você deu está certa?
B: Não.
E: Quantos pacotes foram?
B: Sete.
E: Como você fez para encontrar o sete?
B: Eu fiz assim: Ele já tinha 6 pacotes de figurinhas, o tio dele deu alguns e ele ficou com 13 pacotes de figurinhas. Quanto o tio dele deu? Sete pacotes de figurinhas.
E: Você procurou o número para interar? (usando a expressão colocada por Brun anteriormente).
B: É. Para interar com o seis, para dar 13.
E: E esse aqui? (apontei para a situação feita no dia).

A pesquisadora fez a leitura da situação-problema.

E: Como você fez este?
B: Essa conta é a mesma da folha de lá (aponta para a situação-problema do caderno). Ele ganhou 64 figurinhas de seu tio.
E: Como você encontrou 64?
B: Eu interei o 64 com 42 para dar 106.
E: E como você consegue interar esse número grande na cabeça para encontrar o sessenta e quatro? Como você fez para encontrar esse número?
B: Olha, se eu botasse 52 e 42 ia dar 9..., 52 com 42, ia dar 9. Noventa e quatro, que é pouco. Aí se eu botasse o 64 e o 42 aqui ia dar 4+2 que dá 6, e 6+4 ia dar 10. Que dá 106.
E: Você vai acrescentando até conseguir interar?
B: É.

Observe que, nessa segunda parte da entrevista, as primeiras perguntas estavam direcionadas à resposta dada na atividade de casa, pois a pesquisadora buscava entender as relações que o fizeram colocar 13 na resposta. Contudo, ele foi seguro em cada uma das respostas dadas.

A primeira resposta já trazia indícios de que ele estava compreendendo as relações estabelecidas na situação. Observe que, na terceira resposta, Brun faz uma interpretação própria da situação e ainda elabora uma pergunta – Quanto o tio dele deu? – e responde – Sete pacotes de figurinhas. Diante da postura e firmeza nas

respostas, ficou explícito que o estudante não mais aceitava 13 como resposta, bem como não tinha mais explicações para tal erro. Então a pesquisadora resolveu apenas buscar compreender como ele tinha usado o raciocínio complementar com números mais altos.

Para encontrar o complementar, Brun fez mais tentativas de "interar" com os números maiores do que com os números menores; vale ressaltar que tais tentativas mobilizaram operações mentais mais elaboradas; em cada uma delas, ele resolvia uma expressão com números na ordem das dezenas. Percebemos, também, que, com esse esquema, Brun pode realizar mais operações do que se utilizar o algoritmo esperado como resposta correta.

Brun foi o estudante que utilizou este esquema – uso do *complementar* – com mais frequência. Ao fazer uso do *complementar*, outros esquemas eram mobilizados – o "*cálculo mental*", a *contagem* – sempre buscando determinar o valor do complemento.

A seguir, são observados esquemas com o uso do "*cálculo mental*".

b) Uso do "*cálculo mental*"

Com este esquema, foram classificadas as resoluções nas quais não havia registros que indicavam o cálculo realizado para encontrar a resposta dada. Dessa forma, levantamos a hipótese de que tenha sido feito mentalmente, não abandonando a possibilidade de o estudante ter utilizado algum auxílio, como a contagem nos dedos.

A Figura 4.2.22, a seguir, mostra a resolução registrada pelo estudante Reni na situação-problema 16 do pós-teste, uma composição de várias transformações. Tal

situação solicitava que o estudante compusesse as transformações positivas, bem como as transformações negativas, para depois efetuar a transformação total na coleção de cartões.

Problema 16. Renata tem uma coleção de cartões. Ela ganhou 3 cartões de sua mãe, 2 de sua amiga e 4 cartões de sua prima. Renata resolveu dar 3 dos seus cartões repetidos para sua colega Camila e 2 para seu tio Eduardo. Descontando os cartões que Renata deu, em quanto aumentou os cartões de Renata?

Resolução	Resposta
9 -5 4	Ela aumento 4 na coleção

Figura 4.2.22 - Exemplo do esquema com uso do "*cálculo mental*" usado pelo estudante Reni no pós-teste.

No pré-teste, Reni fez um cálculo numérico classificado como incompreensível, já na atividade de casa, fez corretamente as operações referentes a cada transformação. No pós-teste, ele não registrou as operações que se referiam à composição das transformações positivas (3+2+4) e nem das negativas (3+2), apenas registrou a operação que se referia à transformação total na coleção de cartões de Renata (9-5). A ausência de qualquer outra forma de registro nos levou a supor que o estudante fez ambas as operações utilizando o *"cálculo mental"*, que se constituiu num esquema válido para a resolução da situação, indicando certa compreensão das relações e dos conceitos envolvidos em tal procedimento.

Correa e Moura (1997), numa pesquisa sobre a utilização do "*cálculo mental"* na resolução de situações-

-problema aditivas, colocam que: "De maneira geral, o cálculo mental recebe muito pouca atenção no currículo escolar, sendo reduzido à memorização mecânica de fatos numéricos sem que sejam levadas em conta as estratégias nele envolvidas. [...]" (p. 1). Além desta assertiva, as autoras têm, dentre seus principais resultados, que estudantes dos anos iniciais empregam diferentes "[...] estratégias de cálculo não ensinadas pela escola, ficando evidenciadas as características holísticas, flexíveis e ativas do cálculo mental" (CORREA; MOURA,1997, p.1).

Concordamos com as colocações das autoras e, além disso, acreditamos que conhecer esses esquemas contribui para melhor compreender processos de aprendizagem de conceitos do Campo Aditivo, facilitando ao professor o seu trabalho com vertentes possíveis para o ensino desse campo conceitual. A seguir, o uso de *contagem*.

c) Uso de *contagem*

Aqui foram classificados os esquemas nos quais o estudante usou traços, bolinhas e, ou pontinhos para realizar ou auxiliar na efetuação da operação. Este foi o esquema mais utilizado pelos estudantes no pré (96 repetições) e no pós-teste (48 repetições). Analisando a quantidade de repetições deste esquema em cada teste, é possível afirmar que essa ação ocorreu de maneira inversa nos grupos. Assim, o DV faz uso desse esquema 85 vezes no pré-teste, enquanto que esse esquema apareceu 11 vezes no MD; já no pós-teste, foi usado 28 vezes pelo MD e 20 pelo DV. Acreditamos que o tipo de material didático utilizado na intervenção teve influência direta

no aumento do uso dessa estratégia entre os estudantes do grupo MD, defendendo a ideia de que o material didático (material dourado e ábaco de copinhos) usado nesse grupo conduz à contagem.

A Figura 4.2.23 traz a resolução registrada pelo estudante Duda na situação-problema 10 do pré-teste, uma comparação de 4ª extensão.

Problema 10. No final do jogo de gude, Paulo ficou com 14 gudes. Sabendo que Paulo tem 6 gudes a mais que Jonas, com quantas gudes ficou Jonas?

Resolução	Resposta
$\begin{array}{r} 3 \\ +\ 5 \\ \hline 8 \end{array}$	8 gudes jonas fica.

Figura 4.2.23 - Exemplo do esquema com uso de "*contagem*" usado por Duda na situação-problema 10 no pré-teste.

Na resolução, Duda não registrou qualquer tipo de contagem; esse esquema de ação foi revelado no decorrer da entrevista.

Aparentemente Duda registrou números que não estavam relacionados à situação e conseguiu registrar a resposta correta. Dessa forma, ficaram indagações sobre o tipo de esquema usado pelo estudante, pois este foi registrado pelo referido estudante em 15 das 18 situações-problema do pré-teste, sendo 9 respostas corretas e 6 incorretas. Assim, a entrevista com Duda tinha como objetivo compreender quais eram as relações de pensamento envolvidas em sua resolução. Segue a transcrição

da entrevista[7] (informação verbal)[8].

A pesquisadora mostrou a situação-problema da Figura 4.2.23 e perguntou:

E: Você lembra dessa atividade?
D: Lembro.

A pesquisadora fez a leitura da situação e falou:

E: Você respondeu: oito gudes Jonas ficou.
D: E, ô, fiz errado. Vou pegar meu lápis.
E: Não precisa pegar lápis. Eu não entendi essa conta (apontei para a operação 3+5=8).
D: Deixa eu ver... Aqui é de mais, tia.
E: E esse 3 e esse 5, de onde vieram esses números?
D: Eu não sei de onde eu tirei.
E: Não lembra?
D: Não.

Então a pesquisadora resolveu mostrar a resolução dada por ele, naquele dia, para a mesma situação. A Figura 4.2.24 mostra a resolução.

---

[7] Para a transcrição da entrevista com Duda, a letra E se refere à fala da pesquisadora, e D se refere à fala do Duda.

[8] Perguntas feitas de forma oral pela pesquisadora e respondidas pelo estudante, tendo sido as falas registradas na gravação realizada ao longo da entrevista.

2º) No final do jogo de gude, Paulo ficou com 14 gudes. Sabendo que Paulo tem 6 gudes a mais que Jonas, com quantas gudes ficou Jonas?

Resolução	Resposta
14 −6 7	Jonas ficou com 7 gudes.

Figura 4.2.24 - Esquema com uso de "*contagem*" usado por Duda na atividade da entrevista.

A pesquisadora apresentou a resolução, mostrada na Figura 4.2.24, e perguntou:

E: Como você fez hoje?
D: Esse daqui? (apontou para a atividade feita no dia). Aqui, eu botei.

(Ficou parado). Então a pesquisadora questionou:

E: Será que é o mesmo?

A pesquisadora fez a leitura da situação feita no dia.

D: E..., é. Ficou com 7.
E: Aqui você colocou? (apontei para o pré-teste).
D: Oito gudes.
E: Qual está certo?
D: Esse daqui (apontou para a atividade feita no dia).
E: O de hoje?

D: É.
E: O que você fez no de hoje?
D: Fiz uma conta de menos, eu tirei 14-6.
E: E 14-6 é 7?
D: Eu botei. Não sei.
E: Faz novamente.
D: Deixa eu ver 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8. Tirar quanto?
E: Não sei. Tirar quanto?
D: Tirar 6.
E: Vai ficar quanto?
D: Seis... Cinco!
E: 14-6 é 5?
D: Então deu certo.
E: Faça novamente.
D: Eu só sei fazer, tia. Deixa eu ver se eu fiz aqui. Ah fiz!

Duda começou a contar numas bolinhas feitas no final da página do pré-teste. A Figura 4.2.25 mostra as bolinhas às quais ele se referiu.

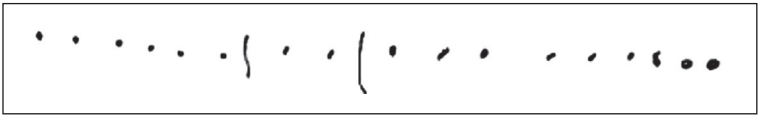


Figura 4.2.25 - Bolinhas feitas por Duda para auxiliar no esquema com uso de *contagem*.

Duda contou 14 bolinhas, depois contou seis bolinhas, marcou essa quantidade com o dedo e contou as bolinhas restantes até chegar em 14. Em seguida, disse:

D: Deu 8.

E: Você colocou quanto aqui? (apontei para a atividade do dia: 14-6=7).
D: Sete.
E: E qual é a resposta certa?
D: Jonas ficou com 8 gudes.
E: Então essa resposta (apontei para a resposta do pré-teste: 8 gudes Jonas ficou) aqui está certa?
D: E é mesmo! Tava certo!
E: E essa conta, você não consegue lembrar como fez ela? (apontei para 3+5=8 Figura 4.2.23).
D: É 3+5.
E: E como você encontrou esse 3+5? Eu queria entender o que você fez.
D: Eu também não estou entendendo, tia.
E: Explica como você fez a conta com essas bolinhas (apontei para o registro da Figura 4.2.25).
D: Eu contei até 14 essas bolinhas.

Em seguida, ele contou novamente as 14 bolinhas, marcou com o dedo em 14 bolinhas, depois contou 6 das bolinhas separadas pelo dedo e disse:

D: Aí aqui eu tirei 6... Aí sobrou....

Contou o restante até 8 e disse:

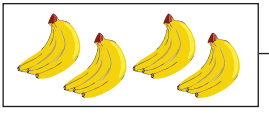
D: Sobrou 8.
E: Então, qual a resposta certa?
D: Oito gudes.
E: E por que colocou 3 e 5 nessa conta? (apontei para a operação no pré-teste Figura 4.2.23).
D: Não sei, tia.

Observe que Duda faz uma sequência de erros e, inseguro, afirma quanto é 14-6, chegando a afirmar que não sabia. Só depois que se lembrou dos registros pictóricos que o apoiavam na *contagem*, e assim conseguiu realizar a operação (14-6). Além disso, não conseguia explicar o esquema usado para registrar a operação.

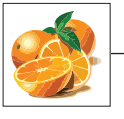
A pesquisadora buscava compreender que relações de pensamento estavam sendo mobilizadas por Duda para registrar a operação logo após ter realizado a *contagem*. Como não conseguiu nessa situação, resolveu mostrar outro procedimento realizado por ele na situação-problema que é uma composição de 1ª extensão. A Figura 4.2.26 mostra a resolução feita por Duda no pré e no pós-teste, e na atividade da entrevista, dessa outra situação.

Pré-teste

Problema 12. Alberto foi à feira para comprar bananas e laranjas. Ele gastou R$ 17,00 ao todo. Sua mãe quer saber quanto custou cada quantidade de fruta. Veja abaixo quanto ele pagou pelas laranjas.



R$9,00



R$ 8,00

Quanto ele pagou pelas bananas?

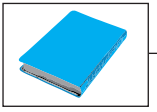
Resolução	Resposta
7 2 9	Ele gastou 9 reais de banana.

(continua)

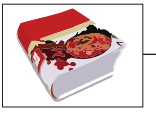
Figura 4.2.26 - Exemplo do esquema com uso de *contagem* usado por Duda na situação-problema no pré e no pós-teste e na atividade da entrevista.

Pós-teste

Problema 12. Alberto comprou um livro e um caderno. Ele gastou R$ 17,00 ao todo. Sua mãe quer saber quanto custou cada objeto. Veja no desenho abaixo quanto ele pagou pelo caderno.



R$ 8,00



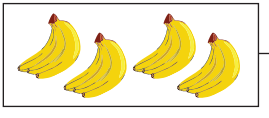
R$ 9,00

Quanto ele pagou pelo livro?

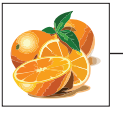
Resolução	Resposta
17 − 8 9	Ele pagou pelo livro R$ 9,00.

Atividade da entrevista

Problema 12. Alberto foi à feira para comprar bananas e laranjas. Ele gastou R$ 17,00 ao todo. Sua mãe quer saber quanto custou cada quantidade de fruta. Veja abaixo quanto ele pagou pelas laranjas.



9,00



R$ 8,00

Quanto ele pagou pelas bananas?

Resolução	Resposta
8 + 9 9,00	

(conclusão)

Figura 4.2.26 - Exemplo do esquema com uso de *contagem* usado por Duda na situação-problema no pré e no pós-teste e na atividade da entrevista.

A seguir, o desenrolar da entrevista.

E: E esse daqui?

A pesquisadora apontou para a situação-problema 12 do pré-teste, fez a leitura e perguntou:

E: O que você respondeu aqui?
D: Ele gastou 9,00 reais de banana.

Duda parou e observou a operação que fez na resolução. Em seguida, disse:

D: E eeeÊ...
E: Que conta foi essa que você fez?
D: Deixa eu ver... Eu não sei, tia...

A pesquisadora apontou para a conta e disse:

E: 7+2 igual a...

Antes de formular a pergunta, ele disse:

D: Deu 9.

Ele pegou a folha com a situação-problema na atividade da entrevista e disse:

D: E, aqui eu coloquei 9+8.
E: 9+8 que é 9?
D: É.
E: 9+8 é quanto?
D: Não é 9 não. Tem que ser 8+1. Que dava 9.
E: Por que 8+1?
D: Ah, tia! Eu tô entendendo... porque tava colocando assim, eu tava procurando um

número que botava com outro que dava 9.

E: Você estava procurando dois números que somados davam nove?

D: É, tava. Foi por isso...

E: E como você achou esse 9?

D: Eu achei... Eu somei com 8 até chegar 17... E faltou 9 para chegar em 17. Eu errei. Era pra mim botar 17 menos 8?

E: Era. Por isso eu não entendi por que você colocou esse 7 e esse 2 (apontei para a situação 12 do pré-teste).

D: Por que eu fiz pelas bolinhas (apontou para as bolinhas feitas no final da página, Figura 4.2.27) e esqueci de apagar aqui.

E: A mesma conta que você faz com as bolinhas é a que você precisa armar aqui (apontei para o espaço da resolução).

D: É.

Duda pegou seu pré-teste e começou a apontar as demais resoluções (13 no total) das situações-problema e dizer qual seria a operação correta. E disse corretamente todas as resoluções.

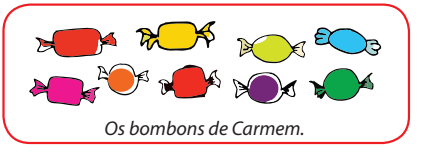
Vale ressaltar que, no pós-teste, Duda usou este esquema de outra forma. Ele passou a usar números no lugar do registro pictórico (bolinhas), como por exemplo, a situação 12, em que o todo era R$ 17,00 e ele escreveu 1, ...,15, 16, 17, e fez a operação corretamente. Todavia, ele apagou o registro dos números, ficando apenas a sombra, o que impossibilitou o escaneamento de tal registro. Este esquema, no pós-teste, foi observado em duas situações de 1ª extensão e em uma de 4ª.

Pela entrevista de Duda, é possível concluir que o estudante se apoiou numa *contagem*, na tentativa de driblar o algoritmo tal qual é trabalhado pela escola. Na verdade, ele tinha segurança ao usar o registro pictórico, mas não conseguia ter a mesma segurança para formalizar o algoritmo e registrar a operação. Assim, foi possível compreender que Duda movimentava a seguinte relação de pensamento: faz a *contagem* usando o raciocínio complementar e, em seguida, encontra dois números quaisquer que somados dão o valor encontrado com a contagem. Contudo, ao ser questionado, ele consegue entender o esquema por ele adotado e reconhecer como poderia apresentar o algoritmo.

Os demais estudantes que também utilizaram a contagem como esquema para a resolução das situações não apresentaram o mesmo procedimento de Duda para registrar a operação. Eles registraram os algoritmos da

Pré-teste

Problema 5. Carmem e Regis têm bombons. Veja o desenho abaixo.



Os bombons de Carmem.

Regis tem 4 bombons a mais que ela. Quantos bombons tem Regis?

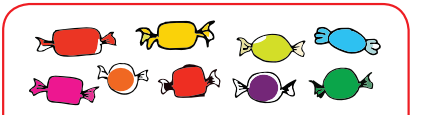
Resolução	Resposta
$\begin{array}{r} 4 \\ +\ 5 \\ \hline 9 \end{array}$	regis tem 5 bombons e carmem tem 4 bombons

(continua)

Figura 4.2.27 - Esquema *tratamento da comparação como composição*, usado por Fane no pré-teste e na atividade da entrevista.

Atividade da entrevista

Problema 5. Carmem e Regis têm bombons. Veja o desenho abaixo.



Os bombons de Carmem.

Regis tem 4 bombons a mais que ela. Quantos bombons tem Regis?

Resolução	Resposta
$\begin{array}{r} 9 \\ +\ 4 \\ \hline 13 \end{array}$	Regis tem 13 bombons.

Figura 4.2.27 - Esquema *tratamento da comparação como composição*, usado por Fane no pré-teste e na atividade da entrevista. (conclusão)

maneira que a escola geralmente trabalha. A seguir, apresentamos o último esquema identificado, o do *tratamento da comparação como composição*.

d) *Tratamento da comparação como composição*

Foram classificadas, nesse esquema, as resoluções nas quais os estudantes deixam de comparar as quantidades para compor um todo.

Este foi um esquema bem peculiar da situação-problema, uma comparação de 2ª extensão que está apresentada na Figura 4.2.27 e que apresenta a resolução colocada pela estudante Fane no pré-teste e na atividade da entrevista para a mesma situação.

Observamos que, assim como Fane, os outros estudantes que fizeram uso desse esquema registraram uma adição de modo que o total fosse igual à quantidade de

bombons apresentada no desenho, e as parcelas fossem partes desse total. Para compreender melhor as relações de pensamento empregadas, segue a transcrição[9] da entrevista feita com Fane (informação verbal)[10].

A pesquisadora fez a leitura da situação e perguntou:

E: Você colocou na resposta: Regis tem 5 bombons e Carmem tem 4 bombons, e fez esta conta (apontei para a operação registrada por ela no pré-teste). Está certo?
S: Tá errada.
E: Por que está errada?
S: Porque Regis tem 5 bombons e Carmem tem 4 e aqui a conta deu 9.
E: Carmem tem quantos?
S: Carmem tem...

Fane parou, pensou um pouco, contou os bombons da ilustração e disse:

S: Nove.
E: Você colocou que ela tinha?
S: Quatro.
E: Por que você fez 4+5 aqui? (apontei para a conta feita no pré-teste).

---

[9] Para a transcrição da entrevista com Fane, a letra E se refere à fala da pesquisadora, e S se refere à fala de Fane.

[10] Perguntas feitas de forma oral pela pesquisadora e respondidas pela estudante, tendo sido as falas registradas na gravação realizada ao longo da entrevista.

Novamente Fane parou, ficou pensando e depois disse:

S: Agora foi que eu fui lembrar que esse aqui (apontou para o pré-teste) é igual a esse (apontou para a atividade da entrevista), mas só que esse daqui tá errado (aponta para o pré-teste) e esse daqui (apontou para a atividade da entrevista) tá certo.
E: Esse tá certo? (apontei para a atividade da entrevista).
S: Aqui tá.
E: E o que você fez aqui? (apontei para a operação registrada na atividade da entrevista).
S: Regis tem 4 e aí eu somei 9+4, deu 13.
E: Regis tem?
S: 13 bombons.
E: Regis tem 13 ou Regis tem 4?
S: É quatro.
E: quatro?
S: Começa a ler a situação-problema novamente e diz: Regis tem 4 bombons a mais que ela. Quantos bombons tem Regis? Aí eu somei, porque ele tem 4 a mais que ela.
E: Ele tem 4 a mais que ela?
S: É.
E: Então você somou o que ele tem a mais com os dela?
S: Foi.

E: Então você somou 4+9, que deu 13?
S: Foi.

E: Treze é a quantidade de bombons de quem?
S: De Regis.
E: E esse aqui (apontei a conta feita no pré-teste), você não lembra por que fez essa conta?
S: Não.
E: Quatro é o número que...

Fane, não deixou terminar a frase e foi logo dizendo:

S: É o número que ele tem a mais.
E: Cinco. Você não lembra?
S: Não. Porque eu pensei que era assim, 4 + 5 que dava 9. Entendeu?
E: Pra dar esse 9 aqui? (apontei para o resultado no pré-teste).
S: Pra mim era assim, depois que eu fui lembrar. Depois que eu fiz a prova foi que eu lembrei.
E: Então você lembrou, e hoje já sabia como era certo?
S: Foi.

Observe que Fane não conseguiu explicitar com muita clareza as relações de pensamento empregadas por ela para a resolução da situação no pré-teste. Todavia, diante das expressões da estudante, a pesquisadora conseguiu compreender que ela tinha entendido, no pré-teste, que os 4 bombons eram de Carmem e representavam uma parte do que estava colocado na representação pictórica, ou seja, se no total havia, no desenho, 9 bombons, 4 eram de Carmem e 5 de Regis.

Vale ressaltar que, no pós-teste, o esquema utilizado por Fane foi o mesmo da atividade da entrevista, ou seja,

ela compreendeu que Carmem tinha 9 bombons e que Regis tinha 4 a mais que ela. Dessa forma, para determinar a quantidade de bombons de Regis, adicionou 9 com 4 e respondeu que Regis tinha 13 bombons.

É importante relembrar que o momento da entrevista aconteceu aproximadamente quatro meses após a aplicação do pós-teste e, ainda, que essa entrevista consistia em apresentar situações-problema similares àquelas contidas nos instrumentos diagnósticos (pré e pós-testes).

Em resumo, ficou evidente que existem múltiplos esquemas de resolução das situações aditivas que, em geral, não são evidenciadas pela escola, mas que os estudantes usam com alguma facilidade. Contudo, esses esquemas podem levar à interpretação e resolução corretas da situação, bem como às incorretas. Acreditamos que a escola necessite ficar atenta à utilização de tais esquemas, pois uma intervenção visando à compreensão e bom desempenho dos estudantes no sentido de não abandonar o uso, mas de aperfeiçoá-lo, pode se transformar num bom caminho para que ocorra o domínio gradativo dos conceitos envolvidos nas situações.

4.2.3.2 Conceitos-em-ação e teoremas-em-ação

Como colocado no Capítulo I, os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação não são verdadeiramente científicos, pois, em geral, são usados de maneira implícita pelos estudantes, não sendo por eles discutidos e nem explanadas a sua veracidade e pertinência. Não se constitui numa verdade universal.

Ao analisar os esquemas de ação mobilizados pelo estudante na resolução de uma dada situação é que podemos observar o "uso intuitivo" e implícito de tais conhecimentos.

Ao analisar os esquemas, foi possível observar ações pertinentes ao complementar um conjunto, bem como a fórmula[11] para determinar o número de elementos do conjunto união. Primeiro, vamos colocar a validade universal de cada um deles e, na sequência, analisar as resoluções dos estudantes.

Iezzi e Murakami (1985) definem o complementar de um conjunto B em um conjunto A da seguinte forma: "Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, chama-se complementar de B em relação a A o conjunto $A - B$, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B" (IEZZI; MURAKAMI, 1985, p. 33-A).

Dentre as propriedades de complementação apresentadas por Iezzi e Murakami (1985, p. 34-A) está:

o complementar de B em relação a A unido a B é igual a A.

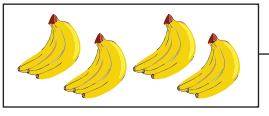
Pelas observações realizadas nos instrumentos diagnósticos, o uso do complementar ocorreu com frequência nas situações-problema 4, 12 e 18, que são de 1ª extensão, sendo as duas primeiras de composição e a última de transformação. Dentre essas, foi mais utiliza-

[11] Autores como Lima (1982, p. 44) e Gentil et al. (1989, p. 25) definem a maneira de determinar o número de elementos de um conjunto finito com uma fórmula que colocamos a seguir.

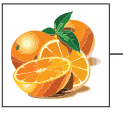
do na 12, que é uma situação pictórica. A Figura 4.2.28 mostra o uso do complementar na situação 12. Essas resoluções foram apresentadas na seção anterior na Figura 4.2.19 e 4.2.26 feitas, respectivamente, por Brun e por Duda.

Duda no pré-teste

Problema 12. Alberto foi à feira para comprar bananas e laranjas. Ele gastou R$ 17,00 ao todo. Sua mãe quer saber quanto custou cada quantidade de fruta. Veja abaixo quanto ele pagou pelas laranjas.



R$ 9,00



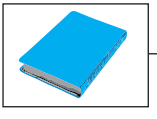
R$ 8,00

Quanto ele pagou pelas bananas?

Resolução	Resposta
4 2 9	Ele gastou 9 reais de banana.

Brun no pós-teste

Problema 12. Alberto comprou um livro e um caderno. Ele gastou R$ 17,00 ao todo. Sua mãe quer saber quanto custou cada objeto. Veja no desenho abaixo quanto ele pagou pelo caderno.



R$ 8,00

9,00

Quanto ele pagou pelo livro?

Resolução	Resposta
9 + 8 17	ele Pagou Pelo Caderno R$ 9,00 reais.

Figura 4.2.28 - Uso de conceito-em-ação e teorema-em-ação no pré-teste de Duda e no pós-teste de Brun.

Na seção anterior, focamos o uso da *contagem* no esquema de resolução de Duda e, no de Brun, o uso do *complementar*. Agora vamos buscar explicitar um teorema-em-ação e um conceito-em-ação usados nesses esquemas de resolução.

Para facilitar a compreensão, vamos denominar para a situação da Figura 4.2.28:

A o valor total das compras;

B o valor das laranjas ou o valor do caderno;

C o valor das bananas ou o valor do livro, que é o complementar de *B* em relação a *A*.

Duda disse: "Eu somei com 8 até chegar 17"; com essa ação, ele busca *C*, que é o complementar de *B* em relação a *A*. Em outras palavras, o que falta em 8 para chegar em 17, ou ainda, o complementar do valor das laranjas em relação ao valor total das compras.

Na mesma direção, Brun afirmou: "Eu peguei o 9 para interar com 8 para dar 17." Ele buscava a diferença entre *A* e *B*, ou seja, o complementar de *B* em relação a *A*, que é o conjunto *C*.

Na fala de Duda e na de Brun, é possível notar o uso implícito da definição de conjunto complementar, o que, para Vergnaud (1982; 1996), é um conceito-em-ação.

Depois de determinar o valor do conjunto complementar *(C)*, Brun buscou registrar, através do algoritmo da adição, uma operação que justificasse a sua resposta; nessa ação, é possível identificar um teorema-em-ação.

Quando foi questionado sobre o algoritmo registrado na resolução, Brun afirmou: "Só sei que peguei 9 reais e 8 reais para dar 17 reais." Ele usa implicitamente que o complementar *B* em relação a *A* unido a *B* é igual a *(C)*. Em outras palavras, o valor do livro *(C)* unido ao valor do caderno *(B)* é igual ao valor das compras *(A)*.

Ressaltamos que esse não foi o teorema-em-ação mais usado pelos estudantes. O mais usado está atrelado à fórmula para determinar o número de elementos do conjunto união. A seguir, colocamos a validade universal dessa fórmula.

Denominando por:

$n(A)$ o número de elementos de um conjunto A;

$n(B)$ o número de elementos de um conjunto B;

$n(A \cup B)$ o número de elementos do conjunto A unido a B;

$n(A \cap B)$ o número de elementos do conjunto A intersecção com B.

Gentil et al. (1989, p. 25) colocam que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \qquad (1)$$

Quando A e B são conjuntos disjuntos, ou seja, não têm elementos em comum, naturalmente se tem que $n(A \cap B) = 0$. Dessa forma, a fórmula apresentada na expressão (1) fica:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B). \qquad (2)$$

Os estudantes usaram implicitamente a fórmula para determinar o número de elementos do conjunto união, de conjuntos disjuntos, colocada na expressão (2).

A Figura 4.2.29 mostra um exemplo de resolução na qual se tem o teorema-em-ação.

Problema 1. Numa cesta de frutas havia 6 laranjas e 7 maçãs. Quantas frutas havia na cesta?

Resolução	Resposta
$\begin{array}{r} 6 \\ +\,7 \\ \hline 13 \end{array}$	havia 13 frutas na cesta.

Figura 4.2.29 - Uso de teorema-em-ação no pós-teste de Edi.

A Figura 4.2.29 mostra a resolução registrada por Edi na primeira situação-problema do pós-teste. Trata-se de uma situação de composição protótipo.

Observe que o estudante apenas registrou a operação de adição 6+7= 13. A situação busca o número total de frutas na cesta. Trata-se de encontrar o número de elementos do conjunto união, denominando de:

A o conjunto das laranjas;

B o conjunto das maças.

Então $A \cup B$ é o conjunto das frutas que estão na cesta.

Assim, tem-se:

$n(A) = 6$; o $n(B) = 7$ e o $n(A \cup B) = 13$,

que foi a soma realizada na ação do estudante.

Contudo, é preciso ressaltar, mais uma vez, que essas etapas seguidas pelo estudante não têm validade universal, mas apenas um alcance local, talvez para pequenas coleções e em situações similares à que lhe foi apresentada.

4.2.3.3 Síntese da terceira fase da análise qualitativa

A terceira fase da análise qualitativa foi designada para a observação e análise de esquemas de resolução feitos pelos estudantes, bem como de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação utilizados por eles.

Foi possível destacar quatro diferentes esquemas de ação utilizados: uso do *complementar*; uso do *"cálculo mental*"; uso de *contagem*; *tratamento da comparação como composição*.

Esses esquemas não são utilizados necessariamente de maneira isolada. Os estudantes chegam a utilizar mais

de um esquema numa mesma resolução. Em geral, alguns deles não são evidenciados pela escola, como é o caso do esquema com o uso de *contagem* utilizado por Duda. Nesse mesmo esquema utilizado por ele, constatamos que mesmo registrando erros na resolução, o raciocínio utilizado tinha muitos pontos corretos.

Baseada nessas evidências é que afirmamos a necessidade de a escola observar a utilização dos esquemas, de modo que a intervenção de ensino possa visar ou apresentar condições para os estudantes aperfeiçoarem o uso de seus esquemas e que ocorra uma melhor aprendizagem dos conceitos envolvidos nas situações.

Ainda foi possível observar, envolvidos nos esquemas de resolução, um conceito-em-ação e dois teoremas-em-ação. Ambos os conhecimentos implícitos observados estão atrelados à Teoria dos Conjuntos. O conceito-em-ação e um dos teoremas-em-ação se referem ao conjunto complementar, e o outro teorema-em-ação se refere à fórmula para determinar o número de elementos do conjunto união. Diante das análises realizadas, deixamos como sugestão que a escola observe e incentive esse tipo de uso implícito do conhecimento, pois ele poderá facilitar a aprendizagem dos conceitos científicos de validade universal a serem abordados nos anos posteriores.

4.2.4 Breve discussão sobre o uso da operação inversa

O uso da *operação inversa* foi um esquema de ação utilizado pelos estudantes de modo muito recorrente

ao longo de toda a pesquisa. As observações revelaram uma estreita relação desse tipo de procedimento com as situações-problema nas quais havia incongruência entre a operação a ser realizada e uma ou mais palavras contidas no enunciado.

Dessa forma, esse tipo de procedimento mereceria um estudo voltado apenas para sua investigação, o que não era nosso objetivo nesse momento. Todavia, julgamos pertinente fazer algumas considerações, uma vez que essas recorrências fizeram refletir sobre o procedimento em questão.

A principal hipótese é que esse procedimento pode ser reflexo da maneira pela qual é introduzida para o estudante a resolução de situações-problema aditivas. De fato, com o intuito de oferecer ao estudante uma maneira eficaz de identificar qual operação ele deve realizar para resolver uma situação-problema, existe certa cultura em se relacionar a escolha da operação a algumas palavras.

Assim, se no enunciado da situação constam palavras tais como "adicionar", "mais", "ganhar", "receber", chama-se atenção para elas no sentido de estarem relacionadas à operação de adição. Da mesma forma, quando em um enunciado há palavras como "perder", "dar", "menos", "emprestar", então se deve realizar uma operação de subtração. Essas "dicas" são válidas para muitas situações-problema, principalmente as que são classificadas como protótipos (as mais trabalhadas na escola), ou, de maneira geral, quando existe congruência entre a "palavra-dica" e a operação a ser realizada.

Elas, contudo, estão longe de ter validade universal, por isso, muitas vezes conduzem o estudante a resolver incorretamente situações não tão sofisticadas, como, por

exemplo, aquelas enquadradas em situações de transformação de 1ª extensão, do tipo "*Maria tem 4 bonecas, ganhou algumas no seu aniversário e agora tem 9 bonecas. Quantas bonecas ela ganhou*?" Ao se deter na palavra *ganhou* como indicador da operação a ser realizada, o estudante termina por realizar uma adição com os valores 4 e 9, chegando ao resultado errôneo de 13 bonecas, ao invés das 5 bonecas que Maria teria ganhado no aniversário.

Existem outras hipóteses que buscam explicar o erro gerado pela incongruência entre uma palavra do enunciado e a operação necessária para resolver corretamente a situação-problema. Franchi (1977, p. 123-124) justifica essa conduta da criança pela sua experiência com tais palavras em seu cotidiano e, ainda, pelas "[...] condições do uso da linguagem [que] produzem uma associação entre os significados dos termos "mais" e "juntar", "acrescentar", ..., "menos" e tirar". Nessa direção, Hudson (1983), a partir de um estudo realizado com 94 crianças de 4 a 8 anos, explorando situações de comparações cujos enunciados faziam uso de termos "quantos a mais", "quantos a menos", conclui que a dificuldade da criança está na ordem da compreensão linguística.

Vasconcelos (1998) aborda modelos teóricos e práticas de ensino para a resolução de situações-problema aditivas. A autora coloca que as dificuldades dos estudantes na resolução das situações aditivas surgem desde a 1ª série do Ensino Fundamental, continuam nas séries seguintes e têm parte de sua origem na forma como o ensino escolar está estruturado. Ainda para a autora, a prática de ensino de resolução de situações-problemas de maneira geral se caracteriza por alguns aspectos, dentre esses, está o trabalho com as "palavras-dica" a partir de regras fornecidas para a criança, como:

> Se a situação [...] envolve ganhar, [...], a operação a ser realizada é adição e, quando [...] for perder, [...], a operação é subtração". Esse recurso tenta evitar a famosa pergunta: "Tia, essa conta é de mais ou de menos?", e permite que diversos problemas sejam resolvidos [...], essa resolução é fruto não da compreensão das relações entre os dados do problema, mas, sim, da "dica" da palavra-chave (VASCONCELOS, 1998, p. 55).

Figueredo (1985 apud VASCONCELOS, 1998, p. 55) mostra que, se o estudante aprende a resolver as situações com essa prática, quando for defrontado com situações-problema em que a "palavra-dica" seja incongruente com a operação a ser realizada, ele não vai conseguir resolver.

Mais recentemente, Campos et al. (2007), ao realizarem um estudo com o objetivo de comparar os desempenhos de estudantes de 1ª a 4ª série, dos estados de São Paulo e Bahia, no que se refere à resolução de situações-problema aditivas, detectaram que, em ambos os grupos, as crianças partem de patamares de sucesso muito baixos em situações de transformação de 1ª extensão, do tipo "*Carlos tinha 4 bolas de gude. Ganhou algumas e agora ele tem 10 bolas de gude. Quantas bolas ele ganhou?*" As autoras justificaram tal resultado pela incongruência semântica que a situação-problema apresenta. O estudo ainda detectou que, enquanto o crescimento no percentual de acertos, por série, das crianças baianas é pequeno, esse crescimento é significativo entre as crianças do grupo paulista. Essa "trajetória crescente mostrada pelos estudantes de São Paulo pode significar que esses, através da instrução, conseguem cada vez mais superar

essa 'armadilha', o que parece não ter acontecido com os estudantes da Bahia" (CAMPOS et al., 2007, p. 234).

No presente estudo, a escolha da operação inversa foi o procedimento de erro de maior incidência. Ocorreu mais frequentemente nas situações-problema que apresentavam incongruência entre uma palavra do enunciado e a operação escolhida pelo estudante. Apesar de esse procedimento ter surgido em situações-problema de transformação (de 1ª e 4ª extensões) e em comparação (de 3ª e 4ª extensões), as maiores repetições ocorreram nas situações de transformação de 1ª extensão e comparação de 4ª extensão, sendo um pouco mais incidente nessa última. Após a intervenção de ensino, elas continuaram mais recorrentes na comparação de 4ª extensão. Esses resultados trazem evidências da relação desse tipo de erro com a complexidade inerente à categoria e à incongruência entre a palavra e a operação.

Dessa forma, as evidências levam a inferir que o grau de complexidade da situação é efetivamente um fator que deve ser levado em consideração quando se analisa a escolha do estudante pela operação inversa.

A intervenção de ensino aplicada neste estudo obteve bons resultados, pois conseguiu minimizar a utilização desse tipo de procedimento. Todavia, não foi suficiente para saná-la. Existem algumas conjecturas que podem explicar tais resultados:

- os estudantes já estavam há, pelo menos, três anos na escola, aprendendo os conceitos do Campo Aditivo e, de certa forma, sendo influenciados pelas práticas ensinadas;

- a intervenção de ensino durou aproximadamente dois meses. Esse tempo pode não ter sido suficiente para que abandonassem definitivamente as velhas práticas.

Contudo, essas são apenas hipóteses sobre os reais motivos que conduzem à permanência da escolha do procedimento pela escolha da operação inversa feita pelo estudante.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, E. **Construindo na pré-escola, 3**: Matemática. São Paulo: Quinteto Editorial, 1997.

BITTAR, M.; FREITAS, J. L. M. **Fundamentos e metodologia de Matemática para os ciclos iniciais do Ensino Fundamental**. 2. ed. Campo Grande, MS: Editora UFMS, 2005.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**. Editado e traduzido por Nicolas Balacheff et al. Londres: Mathematics Education Library, 1997.

CAMPOS, T. M. M. et al. As estruturas aditivas nas séries iniciais do Ensino Fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 10, p. 219-239, 2007.

CORREA, J.; MOURA, M. L. S. A Solução de problemas de adição e subtração por cálculo mental. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Porto Alegre, v. 10, n. 1, 1997. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-79721997000100006#backback>. Acesso em: 8 jul. 2008.

FRANCHI, A. **O problema do ensino da subtração na 1ª série do 1º grau**. Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: PUC/SP, 1977.

GENTIL, N. et al. **Matemática para o 2º grau**. São Paulo: Editora Ática, 1989.

GUIMARÃES, S. D. A resolução de problemas de estrutura aditiva de alunos de 3ª série do ensino fundamental. In: Reunião Anual da ANPED. Caxambu-MG, 2005. **Anais...** 28. Caxambu-MG, 2005. p. 1-21.

_____. Problemas de estrutura aditiva: análise da resolução de alunos de 3ª série do Ensino Fundamental. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 4.1, p. 5-17, 2009.

HUDSON, T. Correspondences and numerical differences between Sets. **Child Development**, 54, 84-90, 1983.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática elementar (Conjuntos, funções)**. 6. ed. v. 1. São Paulo: Atual Editora, 1985.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 3. ed. v. 1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 1982.

LORENZATO, S. Laboratório ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis. In. LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. p. 3-37.

MAGINA, S. et al. **Repensando adição e subtração**: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. 2. ed. São Paulo: PROEM, 2001.

PEIXOTO, J. L. B.; SANTANA, E. R. S.; CAZORLA, I. M. **Soroban**: uma ferramenta para compreensão das quatro operações. Itabuna: Via Litterarum, 2006.

PIAGET, J. **A construção do real na criança**. Tradução: Álvaro Cabral. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. Tradução: Christiano Monteiro Oiticica. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

SANTANA, E. R. S.; CAZORLA, I. M. Encontros e desencontros no ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. In: Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 2005, Canoas-RG. **Anais...** 3. Canoas-RG, p. 1-9, 2005.

SANTANA, E. R. S.; CAZORLA, I. M.; CAMPOS, T. M. M. Diagnóstico do desempenho de estudantes em diferentes situações no campo conceitual das estruturas aditivas. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Águas de Lindóia, 2006. **Anais...** 3. Águas de Lindóia, 2006. p. 1-15.

_____. Desempenho de estudantes em diferentes situações no Campo Conceitual das Estruturas Aditivas. In: **Estudos em Avaliação Educacional**. 2007.

SANTANA, E. R. S. Manipulative material and Representational material. In: Joint Meeting of the International Group and the North American Chapter of Psychology of Mathematics Education, 2008, Morelia-México. Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA. **Anais…** 30., Morelia-México, 2008. p. 1-4.

_____. **Estruturas Aditivas**: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante? Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2010.

SANTANA, E. R. S.; CAZORLA, I. M.; CAMPOS, T. M. M.. Desempenho de estudantes em diferentes situações no Campo Conceitual das Estruturas Aditivas. In: **Estudos em Avaliação Educacional**, 2007.

SANTANA, E. R. S. et al. What relations can we make between primary teacher's conceptions and students performance regarding to additive structures? An analysis of two studies in brazilian schools. In: International Congress on Mathematical Education, 2008, Morélia-México. **Anais…** 11th Congress on Mathematical Education, 2008. p. 1-7.

SANTOS, M. S. **Estruturas Aditivas**: um olhar em livros didáticos do 2º ciclo do Ensino Fundamental. Monografia (Graduação) Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, UESC, 2006.

SELVA, A. C. V. **Resolução de problemas de divisão com crianças pequenas: estratégias X recursos utilizados**. Disponível em: <http://www.educacaoonline.pro.br/resolucao_de_problemas.asp>. Acesso em: 27 abr. 2005.

VASCONCELOS, L. Problemas de adição e subtração: modelos teóricos e práticos de ensino. In: SHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. (Orgs.). **A compreensão de conceitos aritméticos**: ensino e pesquisa. Campinas, SP: Papirus, p. 53-72, 1998.

VEER, R. V. D.; VALSINER, J. **Vygotsky**: uma síntese. Tradução por Cecilia C. Bartalotti. São Paulo: Loyola, 1996.

VERGNAUD, G. A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems. In: **Addition and Subtraction**: a cognitive Perspective. New Jerssey: Lawrense Erlbaun, 1982. p. 39-59.

_____. Didactics as a content-oriented approach to research on the learning of physics, mathematics and natural language. In: **AERA**, New Orleans, p. 01-22, 1984.

_____. Problem of representation in the teaching and learning of mathematics. In: JANVIER, C. (Ed.). Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, p. 227-232, 1987.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In. HIEBERT, H.; BEHR, M. (Ed.). **Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1988a. p. 141-161.

_____. Theoretical Frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education. **ICME VI**, Budapest, 1988b.

_____. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

_____. **El niño, las matemáticas y la realidad**: problemas de la enseñanza de las matemáticas em la escuela primária. México: Trillas, 1991.

_____. Multiplicative conceptual field: what and why? In: Guershon, H.; Confrey, J. (Eds.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N. Y.: State University of New York Press,1994. p. 41-59.

_____. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das matemáticas**. Tradução por Maria José Figueiredo. Lisboa: Intituto Piaget, 1996. p. 155-191.

_____. The nature of mathematical concepts. In: Nunes, T. & Bryant, P. (Ed.) **Learning and Teaching Mathematics**: an International Perspective. Hove East Sussex: Psychology Press Ltd, 1997. p. 5-27

_____. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, 17(2), 1998. p. 167-181.

APÊNDICE A

Instrumento diagnóstico do pré-teste

NOME:_____Idade:_____
Menino ☐ Menina ☐

Você gosta de Matemática?
Não ☐ Pouco ☐ Mais ou menos ☐ Muito ☐
Por quê?_____
_____

Alguém ajuda você a fazer as tarefas de Matemática em casa?
Não ☐ Sim ☐
Se sim, quem?_____
_____

Problema 1. Num tanque, havia 6 peixes vermelhos e 7 peixes amarelos. Quantos peixes havia no tanque?

Problema 2. Fátima tem lápis de cor no seu estojo, deu alguns para sua colega, e ficou com 13 lápis. Veja o desenho dos lápis que Fátima deu.

Os lápis que Fátima deu.

Quantos lápis Fátima tinha antes?

Problema 3. Carine tinha sorvetes em seu isopor. Sua prima tomou alguns dos sorvetes de Carine.
Veja o desenho.

Sorvetes que Carine tinha.

Sorvetes que Carine tem agora

Carine quer saber quantos sorvetes dela sua prima tomou.

Problema 4. Um aquário tem 13 peixes de cor dourada e de cor cinza. Cinco peixes são dourados. Quantos são os peixes cinza?

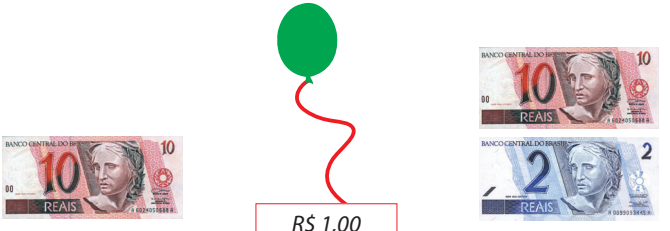
Problema 5. Carmem e Regis têm bombons. Veja o desenho abaixo.

Os bombons de Carmem.

Regis tem 4 bombons a mais que ela. Quantos bombons tem Regis?

Problema 6. Arlete tem dinheiro para comprar chocolate e Rita tem R$ 7,00 a menos que Arlete. Sabendo que Rita tem R$ 13,00, quantos reais tem Arlete?

Problema 7. Duas meninas têm dinheiro nas carteiras; o desenho abaixo mostra quantos reais tem dentro da carteira de cada uma delas. Elas querem comprar balões. Cada balão custa R$1,00.



Ana *Jane*

a) Quem pode comprar mais balões?
b) Quantos balões a mais ela pode comprar?

Problema 8. Artur e Everton participaram de um jogo de gudes. No final do jogo, Artur ficou com as gudes que estão desenhadas abaixo.

As gudes que ficaram com Artur.

Sabendo que Artur tem 6 gudes a mais que Everton, com quantas gudes ficou Everton?

Problema 9. Beatriz devia R$ 12,00 a Cris. Ela pagou R$ 8,00. Quanto Beatriz ficou devendo a Cris?

Problema 10. No final do jogo de gude, Paulo ficou com 14 gudes. Sabendo que Paulo tem 6 gudes a mais que Jonas, com quantas gudes ficou Jonas?

Problema 11. Você tem 9 reais na bolsa.
Escolha uma coisa que você quer comprar e marque com uma cruz.

R$ 9,00

R$ 5,00

R$ 1,00

R$ 2,00

R$ 6,00

R$ 6,00

Marque no quadro de baixo com quantos reais você vai ficar.

9	3	7	5	4	1
8	6	2	10	0	

Problema 12. Alberto foi à feira para comprar bananas e laranjas. Ele gastou R$ 17,00 ao todo. Sua mãe quer saber quanto custou cada quantidade de fruta. Veja abaixo quanto ele pagou pelas laranjas.

Quanto ele pagou pelas bananas?

Problema 13. Leila tem R$ 9,00. Cláudio tem R$ 13,00. Quem tem menos reais? Quantos reais a menos?

Problema 14. Eduardo tem 16 carrinhos de brinquedo e Ramon tem 7 a menos do que ele.
Quantos carrinhos de brinquedo tem Ramon?

Problema 15. Circule duas coisas que você quer comprar.

No quadro de baixo, marque quantos reais você vai gastar para comprar essas duas coisas.

18	1	6	15	8	11	20	12	9
	2	0	22	5	13	17	23	
19	10	7	4	3	14	21	16	

Problema 16. José tem livros de histórias infantis. Ele ganhou 3 livros de seu pai, 2 livros de sua professora e 4 livros de sua tia. José resolveu dar 3 dos seus livros mais velhos para seu amigo Jonas e 2 para seu amigo Rogério. Descontando os livros que José deu, em quanto aumentou os livros de José?

Problema 17. Ana tinha 10 figurinhas e ganhou 4 figurinhas de seu irmão. Quantas figurinhas Ana tem agora?

Problema 18. Carlos tinha 4 bolas de gude. Ganhou algumas e agora ele tem 10 bolas de gude. Quantas bolas ele ganhou?

Instrumento diagnóstico do pós-teste

NOME:_____Idade:_____
Menino ☐ Menina ☐

Você gosta de Matemática?
Não ☐ Pouco ☐ Mais ou menos ☐ Muito ☐
Por quê?_____
_____

Alguém ajuda você a fazer as tarefas de Matemática em casa?
Não ☐ Sim ☐
Se sim, quem?_____
_____

Problema 1. Numa cesta de frutas, havia 6 laranjas e 7 maçãs. Quantas frutas havia na cesta?

Problema 2. Laura tem pirulitos, deu alguns para sua colega, e ficou com 13. Veja o desenho dos pirulitos que Laura deu.

Os pirulitos que Laura deu.

Quantos pirulitos Laura tinha antes?

Problema 3. Carlos tinha lápis. Sua prima tomou alguns de seus lápis. Veja o desenho.

Lápis que Carlos tinha.

Lápis que Carlos tem agora.

Carlos quer saber quantos lápis dele sua prima tomou.

Problema 4. Na escola tem 13 baldes para colocar lixo, na cor verde e na cor vermelha. Cinco são verdes. Quantos são os vermelhos?

Problema 5. Bruna e Igor têm balões. Veja o desenho abaixo.

Os balões de Bruna

Igor tem 4 balões a mais que ela. Quantos balões tem Igor?

Problema 6. Daniel tem dinheiro para comprar um livro e Vinícius tem R$ 7,00 a menos que Daniel. Sabendo que Vinícius tem R$ 13,00, quantos reais tem Daniel?

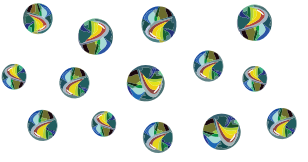
Problema 7. Ana e Tânia têm dinheiro para comprar caixinhas de doces para dar a seus amigos. O desenho abaixo mostra quantos reais cada uma tem. Cada caixinha de doces custa R$1,00.

Dinheiro de Ana

Dinheiro de Tânia

a) Quem pode comprar mais caixinhas de doces?
b) Quantas caixinhas de doces a mais ela pode comprar?

Problema 8. Manoel e Pedro participaram de um jogo de gudes. No final do jogo, Manoel ficou com as gudes que estão desenhadas abaixo.



As gudes que ficaram com Artur.

Sabendo que Manoel tem 6 gudes a mais que Pedro, com quantas gudes ficou Pedro?

Problema 9. Taís devia R$ 12,00 a Leia. Ela pagou R$ 8,00. Quanto Taís ficou devendo a Leia?

Problema 10. Paulo tem 14 gibis. Sabendo que Paulo tem 6 gibis a mais que Jonata, quantos gibis tem Jonata?

Problema 11. Você tem 9 reais.
Escolha uma coisa que você quer comprar e marque com uma cruz.

R$ 5,00

R$ 8,00

R$ 2,00

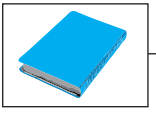
R$ 6,00

R$ 1,00

Marque no quadro de baixo com quantos reais você vai ficar.

9	3	7	5	4	1
8	6	2	10	0	

Problema 12. Alberto comprou um livro e um caderno. Ele gastou R$ 17,00 ao todo. Sua mãe quer saber quanto custou cada objeto. Veja no desenho abaixo quanto ele pagou pelo caderno.



R$ 8,00

Quanto ele pagou pelo livro?

Problema 13. Roger tem R$ 9,00. Everton tem R$ 13,00. Quem tem menos reais? Quantos reais a menos?

Problema 14. Marcos tem 16 figurinhas e Fernando tem 7 a menos do que ele. Quantas figurinhas tem Fernando?

Problema 15. Circule duas coisas que você quer comprar.

R$ 5,00

R$ 8,00

R$ 2,00

R$ 6,00

R$ 1,00

No quadro de baixo, marque quantos reais você vai gastar para comprar essas duas coisas.

18	1	6	15	8	11	20	12	9
	2	0	22	5	13	17	23	
19	10	7	4	3	14	21	16	

Problema 16. Renata tem uma coleção de cartões. Ela ganhou 3 cartões de sua mãe, 2 de sua amiga e 4 cartões de sua prima. Renata resolveu dar 3 dos seus cartões repetidos para sua colega Camila e 2 para seu tio Eduardo. Descontando os cartões que Renata deu, em quanto aumentou os cartões de Renata?

Problema 17. Juliana tinha 10 maçãs e ganhou 4 maçãs de sua prima. Quantas maçãs Juliana tem agora?

Problema 18. Gabriel tinha 4 livros infantis. Ganhou alguns e agora ele tem 10 livros infantis. Quantos livros infantis ele ganhou?

APÊNDICE B

Sequência de ensino

1º ENCONTRO: SITUAÇÕES PARA A SALA DE AULA
Situações-problema protótipos de composição e de transformação

1º) Sua tia vai comprar dois brinquedos para você. Escolha dois dos brinquedos que estão colocados abaixo e circule-os.

R$ 5,00

R$ 7,00

R$ 3,00

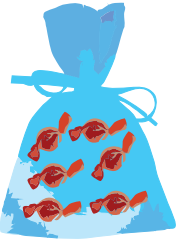
R$ 9,00

R$ 10,00

R$ 6,00

Quanto sua tia vai gastar comprando esses dois brinquedos? (Composição protótipo pictórica).

2º) Ana tem um saquinho com balas de chocolate e outro com balas de morango. Veja o desenho dos saquinhos de balas da Ana.



Balas de chocolate

Balas de morango

Quantas balas Ana tem ao todo?
(Composição protótipo pictórica).

3º) Viviane tem R$ 7,00 na bolsa e R$ 5,00 no cofrinho. Quantos reais ela tem ao todo?
(Composição protótipo não pictórica).

4º) Célia tem 6 figurinhas da Branca de Neve e 8 figurinhas da Cinderela. Quantas figurinhas Célia tem no total?
(Composição protótipo não pictórica).

5º) Imagine que você tem R$ 15,00 para gastar no lanche da escola. E que na cantina da escola tem os lanches que estão abaixo. Escolha um dos lanches que você gostaria de comprar e faça um círculo nele.

R$ 4,00

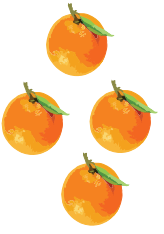
R$ 8,00

R$ 3,00

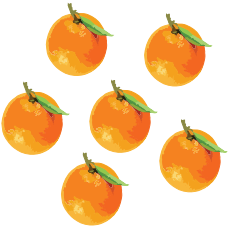
R$ 11,00

Com quantos reais você ficaria depois que pagasse o lanche que você escolheu?
(Transformação protótipo, transformação negativa, pictórica).

6º) Gabi vai para um piquenique. Ela tinha laranjas que estão desenhadas abaixo.
A mãe de Gabi comprou mais laranjas para ela levar ao piquenique.



Laranjas que Gabi tinha.



Laranjas que a mãe de Gabi comprou.

Quantas laranjas Gabi vai levar para o piquenique?
(Transformação protótipo, transformação positiva, pictórica).

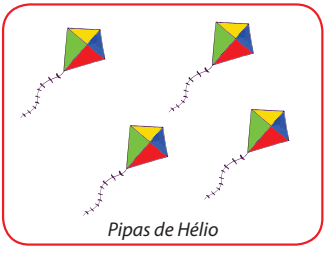
7º) Breno tinha R$ 4,00. Ele ganhou R$ 7,00 de seu avô. Com quantos reais Breno ficou?
(Transformação protótipo, transformação positiva, não pictórica).

8º) Francisco tinha 15 carrinhos em sua coleção. Ele resolveu dar 4 desses carrinhos para o seu melhor amigo. Com quantos carrinhos Francisco ficou em sua coleção?
(Transformação protótipo, transformação negativa, não pictórica).

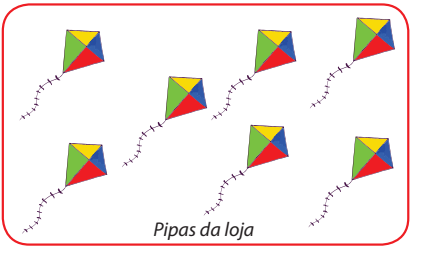
ATIVIDADE PARA CASA DO 1º ENCONTRO

1º) No primeiro quadro, estão as pipas que Hélio tem. No segundo quadro, estão as pipas que há numa loja. O padrinho de Hélio vai comprar na loja pipas para ele.

1º quadro



2º quadro



Escolha as pipas para o padrinho dar para Hélio. E faça um círculo em volta delas.
Com quantas pipas Hélio vai ficar?
(Transformação protótipo, transformação positiva, pictórica).

2º) Neta tem 7 CDs de samba e 5 CDs de forró. Quantos CDs Neta tem ao todo?
(Composição protótipo, não pictórica).

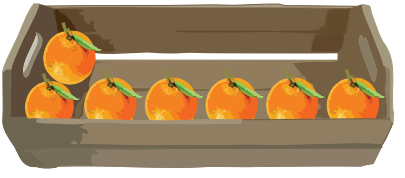
2º ENCONTRO: SITUAÇÕES PARA A SALA DE AULA
Situações-problema de 1 ª extensão de composição e de transformação

1º) Maria foi ao supermercado e comprou uma caixa de bombom e uma garrafa térmica. Ela pagou R$ 14,00 ao todo. Sua mãe quer saber quanto custou cada objeto, mas ela só lembra o preço da caixa de bombom, que é R$ 6,00.

R$ 6,00

Qual é o preço da garrafa térmica?
(Composição 1ª extensão pictórica).

2º) O desenho abaixo mostra uma caixa de frutas, que está com laranjas. O agricultor está colocando as laranjas. Uma caixa completa tem que ter 12 laranjas no total.



Quantas laranjas dessa caixa ainda estão do lado de fora?
(Composição 1ª extensão, pictórica).

3º) André gastou R$ 10,00 para comprar um caderno e um livro. O caderno custou R$ 6,00. Quanto custou o livro?
(Composição 1ª extensão, não pictórica).

4º) Helen tem 13 brinquedos de pelúcia, sendo gatos e ursos. Sete são ursos. Quantos são os gatos?
(Composição 1ª extensão, não pictórica).

5º) Na prateleira da venda de José tinha uma quantidade de latas de óleo no começo da manhã. No fim da tarde, ele viu a quantidade de latas que sobraram na prateleira. Veja a ilustração.

Começo da manhã *Fim da tarde*

Quantas latas de óleo José vendeu nesse dia?
(Transformação 1ª extensão, transformação negativa, pictórica).

6º) Fabi tinha rosas. E ela ganhou algumas rosas de sua amiga. Veja a ilustração abaixo. Quantas rosas Fabi ganhou de sua amiga?

Rosas que Fabi tinha antes de ganhar algumas de sua amiga.

Rosas que Fabi ficou depois de ganhar algumas de sua amiga.

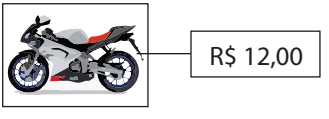
(Transformação 1ª extensão, transformação positiva, pictórica).

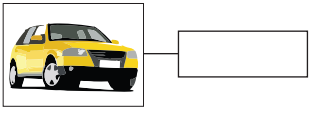
7º) João tinha R$ 15,00 no sábado. No domingo gastou uma quantidade desse dinheiro no parque de diversões. Na segunda, ele verificou e tinha R$ 8,00. Quantos reais ele gastou no parque?
(Transformação 1ª extensão, transformação negativa, não pictórica).

8º) Deise tinha 5 vestidos. Em seu aniversário, ela ganhou alguns vestidos de seus parentes. Agora Deise tem 11 vestidos. Quantos vestidos Deise ganhou dos parentes?
(Transformação 1ª extensão, transformação positiva, não pictórica).

ATIVIDADE PARA CASA DO 2º ENCONTRO

1º) Renato pagou R$ 19,00 na compra de uma moto e um carrinho de brinquedo. Veja a ilustração abaixo, com o preço da moto.
Quanto custou o carrinho?



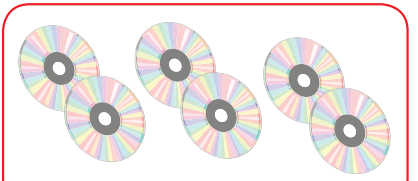


(Composição 1ª extensão, pictórica).

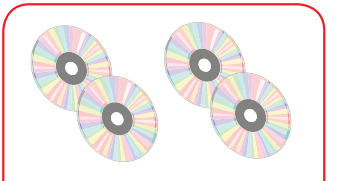
2º) Larisa tinha 8 quebra-cabeças em seus brinquedos. Ela ganhou outros quebra-cabeças no Natal. Agora ela tem 13 quebra-cabeças. Quantos quebra-cabeças Larisa ganhou no Natal?
(Transformação 1ª extensão, transformação positiva, não pictórica).

3º ENCONTRO: SITUAÇÕES PARA A SALA DE AULA
Situações-problema de comparação 2ª extensão

1º) Gabriel e Lucas têm CDs, veja o desenho abaixo.



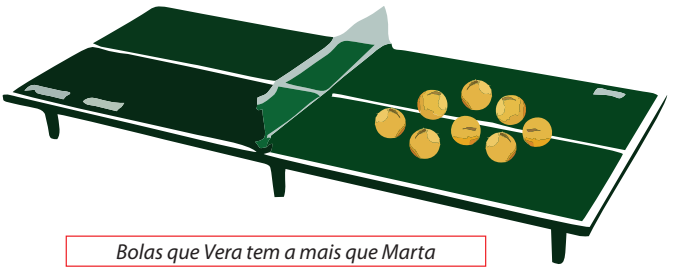
CDs de Gabriel



CDs que lucas tem a mais que Gabriel

Quantos CDs Lucas tem?
(Comparação 2ª extensão, relação negativa, pictórica).

2º) Marta tem 6 bolas de ping-pong. E Vera tem algumas bolas a mais que Marta.
As bolas que Vera tem a mais estão mostradas no desenho abaixo.



Bolas que Vera tem a mais que Marta

Quantas bolas tem Vera?
(Comparação 2ª extensão, relação positiva, pictórica).

3º) Cláudio tem R$ 9,00 e Vinícius tem R$ 5,00 a mais que ele. Quantas figuras tem Vinícius?
(Comparação 2ª extensão, relação positiva, não pictórica).

4º) Carol tem 18 bonecas e Lilia tem 5 a menos do que ela. Quantas bonecas tem Lilia?
(Comparação 2ª extensão, relação negativa, não pictórica).

ATIVIDADE PARA CASA DO 3º ENCONTRO

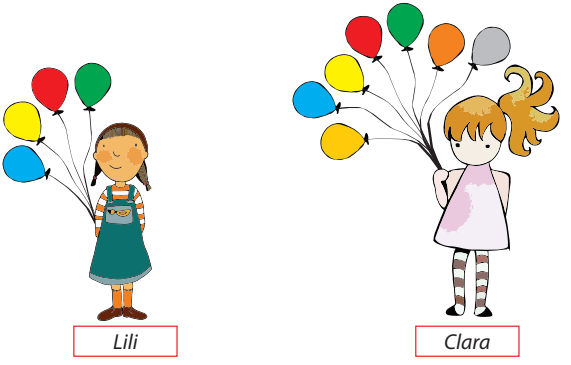
1º) Uma loja tem 13 peças de tecido. São peças coloridas e peças brancas. Seis são peças brancas. Quantas são as coloridas?
(Composição 1ª extensão, não icônica).

2º) Rafaela tinha R$ 16,00 quando foi para a bomboniere. Ela gastou uma quantidade desse dinheiro na bomboniere. Quando chegou em casa, ela verificou e tinha R$ 7,00. Quantos reais ela gastou na bomboniere?
(Transformação 1ª extensão, transformação negativa, não icônica).

3º) Sílvia e Mário são irmãos. Sílvia tem 21 anos. E Mário tem 8 anos a mais que Sílvia. Quantos anos tem Mário?
(Comparação 2ª extensão, relação positiva, não icônica).

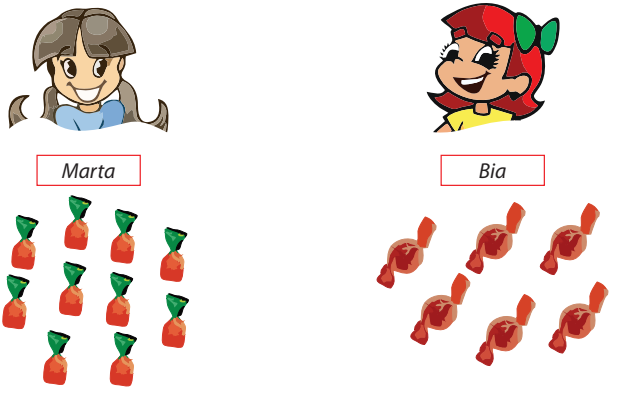
4º ENCONTRO: SITUAÇÕES PARA A SALA DE AULA
Situações-problema de comparação: 3ª extensão

1º) Veja o desenho abaixo:



Qual o nome da garota que tem menos bolas? Quantas bolas a menos ela tem?
(Comparação 3ª extensão, relação negativa, pictórica).

2º) Veja as balas que cada uma das crianças tem.



Qual o nome da criança que tem mais balas? Quantas balas a mais ela tem?
(Comparação 3ª extensão, relação positiva, pictórica).

3º) Heitor e José ganharam dinheiro de seus padrinhos. Heitor ganhou R$ 14,00 e o José ganhou R$ 23,00. Quem ganhou menos reais? Quantos reais a menos?
(Comparação 3ª extensão, relação negativa, não pictórica).

4º) Antonio vai convidar seus amigos para fazer um lanche comemorando o seu aniversário. Ele está escolhendo a lanchonete que tem mais mesas disponíveis. A Lanchonete Kipão tem 8 mesas e a Lanchonete Uil tem 14 mesas. Onde Antonio vai comemorar o seu aniversário? Quantas mesas tem a mais nesta lanchonete?
(Comparação 3ª extensão, relação positiva, não pictórica).

ATIVIDADE PARA CASA DO 4º ENCONTRO

1º) Cris gastou R$12,00 na padaria para comprar pães e biscoitos. Os pães custaram R$ 5,00. Quanto custaram os biscoitos?
(Composição 1ª extensão, não pictórica).

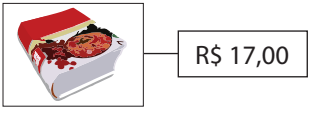
2º) Cláudio tem 9 figurinhas e Vinícius tem 5 figurinhas a mais que ele. Quantas figuras tem Vinícius?
(Comparação 2ª extensão, não pictórica).

3º) Mamãe vai comprar uma panela. Ela está procurando o supermercado onde ela pague menos. Veja os preços dos supermercados e ajude a mamãe a escolher o menor preço.

Em qual supermercado ela vai pagar menos? Quantos reais a menos ela vai pagar?
(Comparação 3ª extensão, relação negativa, pictórica).

5º ENCONTRO: SITUAÇÕES PARA A SALA DE AULA
Situações-problema de transformação e de comparação de 4ª extensão

1º) Luciana foi à livraria para comprar um livro. Veja o livro que ela comprou e o seu preço.



Depois da compra, Luciana ficou com R$ 5,00 na carteira. Quanto ela tinha na carteira antes de comprar?
(Transformação 4ª extensão, transformação negativa, pictórica).

2º) Maria tinha algumas revistas em quadrinhos. Sua madrinha deu 6 revistas para ela. Ela ficou com 19 revistas em quadrinhos. Quantas revistas em quadrinhos Maria tinha antes?
(Transformação 4ª extensão, transformação positiva, não pictórica).

3º) Júlia tem pirulitos que estão desenhados abaixo. Carlos tem 4 pirulitos a menos que Júlia.

Pirulitos de Júlia

Quantos pirulitos tem Carlos?
(Comparação 4ª extensão, relação negativa, pictórica).

4º) Taís tem dinheiro para comprar seu lanche. E Vera tem R$ 4,00 a mais que Taís. Sabendo que Vera tem R$ 9,00, quantos reais tem Taís?
(Comparação 4ª extensão, relação positiva, não pictórica).

ATIVIDADE PARA CASA DO 5º ENCONTRO

1º) Márcio tem 16 figurinhas do Flamengo e do Vasco. Ele tem sete figurinhas do Vasco. Quantas figurinhas do Flamengo ele tem?
(Composição 1ª extensão, não pictórica).

2º) Roberto comprou 6 pacotes de figurinhas. E seu tio também lhe deu alguns. Agora ele tem 13 pacotes. Quantos pacotes de figurinhas ele ganhou de seu tio?
(Transformação 1ª extensão, transformação positiva, não pictórica).

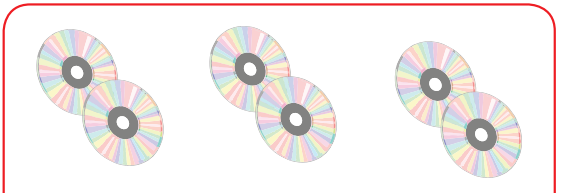
3º) Mário e Pedro têm carrinhos de brinquedo.Veja na ilustração os carrinhos de Mário.

Carrinhos de Mário

Mário tem 5 carrinhos a mais que Pedro. Quantos carrinhos tem Pedro?
(Comparação de 4ª extensão, relação positiva, pictórica).

6º ENCONTRO: SITUAÇÕES PARA A SALA DE AULA
Situações-problema de transformação e de comparação de 4ª extensão

1º) Lucas tem CDs infantis. Ele ganhou CDs de sua irmã. Veja a ilustração.



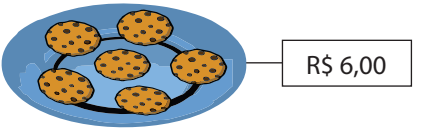
CDs que Lucas ganhou de sua irmã.

Agora Lucas tem 15 CDs. Quantos CDs Lucas tinha antes?
(Transformação 4ª extensão, transformação positiva, pictórica).

2º) Bruno tinha dinheiro em seu cofrinho. Ele comprou R$ 8,00 de doces.

Bruno ficou com R$ 5,00 em seu cofrinho. Quantos reais Bruno tinha antes de comprar os doces?
(Transformação 4ª extensão, transformação negativa, não pictórica).

3º) Cláudia e Mara compraram biscoitos. Veja a ilustração abaixo.



Biscoitos que Cláudia comprou

Cláudia comprou R$ 2,00 a mais que Mara. Quantos reais de biscoito Mara comprou?
(Comparação de 4ª extensão, relação positiva, pictórica).

4º) Érica tem 13 bonecos de pano. Marta tem 5 bonecos de pano a menos que Érica.
Quantos bonecos de pano tem Marta?
(Comparação 4ª extensão, relação negativa, não pictórica).

ATIVIDADE PARA CASA DO 6º ENCONTRO

1º) Ana tem 9 vestidos e Jane tem 5 vestidos a mais que ela. Quantos vestidos tem Jane?
(Comparação 2ª extensão, relação positiva, não pictórica).

2º) A professora da 1ª série tem 12 livros de Matemática. E a professora da 3ª série tem 21 livros de Matemática. Qual a professora que tem menos livros? Quantos livros a menos ela tem?
(Comparação 3ª extensão, relação negativa, não pictórica).

3º) A tia de Mário deu 3 canetas para ele. Veja a ilustração.

As canetas com que Mário ficou.

Quantas canetas Mário tinha antes?
(Transformação 4ª extensão, transformação positiva, pictórica).

7º ENCONTRO: SITUAÇÕES PARA A SALA DE AULA
Situações-problemas das outras categorias

1º) Lílian tem uma coleção de figurinhas. Ganhou 6 figurinhas de seu irmão. Deu a sua amiga 3 figurinhas. Em quantas figurinhas aumentou a coleção de Lílian?
(Composição de várias transformações, transformação positiva e transformação negativa, não pictórica).

2º) Joana tinha uma coleção de selos. No seu aniversário ela ganhou 8 selos da madrinha, 5 selos de sua avó e outros 10 de seu pai. Como ela ganhou selos repetidos,

ela resolveu dar 3 que estavam repetidos para seu primo Zé e 4 repetidos para sua irmã Ana. Descontando os selos repetidos que Joana deu, em quantos selos Joana aumentou a sua coleção?
(Composição de várias transformações, transformação positiva e transformação negativa, não pictórica).

3º) Lorena devia R$ 15,00 a Ana. Ela pagou R$ 7,00. Quantos reais Lorena ficou devendo a Ana?
(Transformação de uma relação, não pictórica).

ATIVIDADE PARA CASA DO 7º ENCONTRO

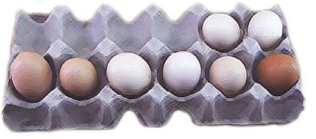
1º) Marcos deve 8 figurinhas a Antônio e 6 a Flávio. Ontem ele pagou 3 figurinhas a Antônio e 2 a Flávio. Quantas figurinhas Marcos ainda deve no total?
(Composição de várias transformações, não pictórica).

2º) Artur quebrou os carrinhos de brinquedo de Saulo e ficou lhe devendo 12 carrinhos. Artur comprou 7 carrinhos para pagar a Saulo. Quantos carrinhos ele ficou devendo a Saulo?
(Transformação de uma relação, não pictórica).

3º) Júlio e Marcos são amigos e cada um vai comprar uma bola. Júlio tem R$ 19,00 para comprar a bola dele e Marcos tem R$ 5,00 a menos que Júlio. Quantos reais Marcos tem para comprar a bola?
(Comparação 4ª extensão, relação negativa, não pictórica).

8º ENCONTRO: SITUAÇÕES PARA A SALA DE AULA
Situações-problemas para revisão

1º) Tatiane está limpando a caixa de ovos. A caixa tem 12 ovos no total. Até agora ela colocou uma parte dos ovos dentro da caixa. Veja o desenho da caixa com os ovos que Tatiane já colocou:



Alguns dos ovos ainda estão do lado de fora. Quantos ovos faltam para Tatiane deixar a caixa completa?
(Composição 1ª extensão, pictórica).

2º) Cida tinha 12 lápis de cor. Ela ganhou alguns lápis de cor de sua professora. Cida tem agora 18 lápis de cor. Quantos lápis Cida ganhou de sua professora?
(Transformação 1ª extensão, transformação positiva, não pictórica).

3º) Geraldo comprou uma camisa. Veja o desenho abaixo.

Geraldo ficou com R$ 8,00 depois que comprou a camisa. Quantos reais Geraldo tinha antes de fazer essa compra?
(Transformação 4ª extensão, transformação positiva, pictórica).

4º) Bruna e Talisa têm dinheiro para brincar no parque. Bruna tem R$ 19,00 e Talisa tem R$ 15,00. Quem tem mais reais? Quantos reais a mais?
(Comparação 3ª extensão, relação positiva, não pictórica).

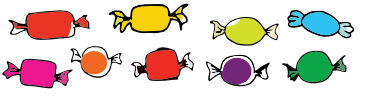
APÊNDICE C

Atividades da entrevista
Situações-problema para a entrevista do MD

NOME:_____

1º) Num tanque, havia 6 peixes vermelhos e 7 peixes amarelos. Quantos peixes havia no tanque?

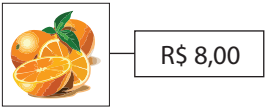
2º) Carmem e Regis têm bombons. Veja o desenho abaixo.



Os bombons de Carmem.

Regis tem 4 bombons a mais que ela. Quantos bombons tem Regis?

3º) Alberto foi à feira para comprar bananas e laranjas. Ele gastou R$ 17,00 ao todo. Sua mãe quer saber quanto custou cada quantidade de fruta. Veja abaixo quanto ele pagou pelas laranjas.



Quanto ele pagou pelas bananas?

4º) Carlos tinha 4 bolas de gude. Ganhou algumas e agora ele tem 10 bolas de gude. Quantas bolas ele ganhou?

5º) Márcio tem 175 figurinhas do Flamengo e do Vasco. Ele tem 83 figurinhas do Vasco. Quantas figurinhas do Flamengo ele tem?

6º) Roberto tinha 42 pacotes de figurinhas. E seu tio lhe deu alguns pacotes de figurinhas. Agora ele tem 106 pacotes. Quantos pacotes de figurinhas ele ganhou de seu tio?

7º) Mário e Pedro têm carrinhos de brinquedo. Veja na ilustração os carrinhos de Mário.

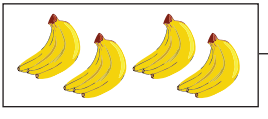
Carrinhos de Mário

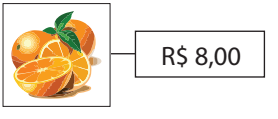
Mário tem 8 carrinhos a mais que Pedro. Quantos carrinhos tem Pedro?

Situações-problema para a entrevista do DV

NOME:_____

1º) Alberto foi à feira para comprar bananas e laranjas. Ele gastou R$ 17,00 ao todo. Sua mãe quer saber quanto custou cada quantidade de fruta. Veja abaixo quanto ele pagou pelas laranjas.





Quanto ele pagou pelas bananas?

2º) No final do jogo de gude, Paulo ficou com 14 gudes. Sabendo que Paulo tem 6 gudes a mais que Jonas, com quantas gudes ficou Jonas?

Este livro permite uma agradável e profunda viagem pelas premissas e paradigmas da Teoria dos Campos Conceituais e das Estruturas Aditivas como construídas por Vergnaud. Um texto instigante que apresenta uma agradável confluência entre a teoria e a prática, oferecendo ao professor um subsídio teórico para a sua prática em sala de aula. Sua leitura é de grande valia para todos os educadores e pesquisadores que atuam no Ensino Fundamental, incluindo os de formação matemática, pedagógica e psicológica, permitindo, também, aos mestrandos e doutorandos, apreciar uma pesquisa com argumentos sólidos, fundamentação apropriada, metodologia cuidadosamente elaborada e uma análise detalhada dos resultados.

ISBN 978-85-7455-270-5

9 788574 552705