ÁLGEBRA LINEAR

RESUMO DA TEORIA

71 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS E 80 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

CLÁUDIA RIBEIRO SANTANA
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
&
JOSEPH NEE ANYAH YARTEY
Universidade Federal da Bahia - UFBA
Departamento de Matemática - DMAT

2008

Para minhas queridas avós,
Maria de Lourdes Reis Ribeiro e Esmeralda Reis.

Sumário

Prefácio

O presente material é um dos frutos do projeto de extensão Home Page de Matemática, que tem como objetivo principal a confecção de material didático para o uso dos alunos e professores dos cursos de Matemática e Ciências da UESC.

Tendo em vista que os livros-textos clássicos de Álgebra Linear estão muito bem escritos, não ousamos fazer mais um livro-texto com demonstrações de teoremas e proposições. Nosso objetivo foi preencher algumas lacunas deixadas por eles como, por exemplo, alguns resultados importantes na teoria quando trabalhados em espaços vetoriais de dimensão finita podem ser estendidos para dimensão infinita, e nos casos em que isto não é possível, contra-exemplos foram citados.

Convém observar que este primeiro volume contempla somente a teoria até diagonalização de operadores lineares. Para dinamizar a leitura, fornecemos o resumo da teoria de forma lógica, sem demonstrações, passando para o coração do livro que são os exercícios resolvidos que funcionam, na verdade, como exemplos, seguidos por exercícios propostos, com resposta no final do livro, para que os alunos ou professores sejam estimulados a pensar e tirar conclusões sobre pontos específicos da teoria.

Pelo fato de a maioria dos cursos introdutórios de Álgebra Linear focar a teoria em espaços vetoriais de dimensão finita, iniciamos o nosso estudo sobre o alicerce da Álgebra Linear em dimensão finita, que é o estudo de Matrizes.

No final de cada capítulo, foram acrescentados apêndices com a complementação da teoria dada naquele capítulo, ou então somente indicação de livros como sugestão de leitura, para os alunos que estejam interessados em aprofundar seus conhecimentos.

Os teoremas, proposições, ou seja, a teoria aqui apresentada tem a sua versão geral num corpo K qualquer.

Acreditamos que o livro será de grande utilidade e, num futuro próximo, desejamos ter a constatação de que o foi de fato. Apreciem a leitura.

Cláudia Santana e Joseph Yartey.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Corpos

Definição 1.1.1. *Um conjunto $\mathbb{K}$, não vazio, é um corpo se, em $\mathbb{K}$, pudermos definir duas operações, denotadas por $+$ (adição) e $\cdot$ (multiplicação), satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{K}$ (*propriedade comutativa*).

2. $a + (b + c) = (a + b) + c,\ \forall a, b, c \in \mathbb{K}$ (*propriedade associativa*).

3. *Existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por $\mathbf{0}$ e chamado de elemento neutro da adição, que satisfaz $\mathbf{0} + a = a + \mathbf{0} = a,\ \forall a \in \mathbb{K}$.*

4. *Para cada $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por $-a$ e, chamado de oposto de a (ou inverso aditivo de a) tal que*
   $a + (-a) = (-a) + a = \mathbf{0}$.

5. $a \cdot b = b \cdot a,\ \forall a, b \in \mathbb{K}$ (*propriedade comutativa*).

6. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,\ \forall a, b, c \in \mathbb{K}$ (*propriedade associativa*).

7. *Existe um elemento em $\mathbb{K}$ denotado por $\mathbf{1}$ e chamado de elemento neutro da multiplicação, tal que $\mathbf{1} \cdot a = a \cdot \mathbf{1} = a, \forall a \in \mathbb{K}$.*

8. *Para cada elemento não nulo* $a \in \mathbb{K}$, *existe um elemento em* $\mathbb{K}$, *denotado por* a^{-1} *e chamado de inverso multiplicativo de* a, *tal que* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \mathbf{1}$.

9. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ (*propriedade distributiva*).

Notação: Para simplificar, vamos denotar ab para indicar o produto $a \cdot b$.

Observação 1.1.2. *Exemplos de Corpos*
$\mathbb{Q}$: *Conjunto dos números racionais;* $\mathbb{R}$: *Conjunto dos números reais;* $\mathbb{C}$: *Conjunto dos números complexos*

Exemplo de corpo não-trivial:
Considere $p \in \mathbb{N}$ *um número primo.* $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ *é um subcorpo do corpo dos números reais. Observemos que* $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \subset \mathbb{R}$, *portanto basta mostrar que a adição e multiplicação, definidas para os números reais, são operações fechadas em* $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$.

De fato, sejam a, b, c *e* $d \in \mathbb{Q}$

1. $(a + b\sqrt{p}) + (c + d\sqrt{p}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{p}$, *portanto* $(a + b\sqrt{p}) + (c + d\sqrt{p}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$.

2. $(a + b\sqrt{p}) \cdot (c + d\sqrt{p}) = (ac + bdp) + (ad + bc)\sqrt{p}$, *portanto* $(a + b\sqrt{p}) \cdot (c + d\sqrt{p}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$.

Afirmação: $\forall (a + b\sqrt{p}) \neq 0 \Rightarrow \exists\, (a + b\sqrt{p})^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$.

De fato, pelo método de racionalização de denominadores temos

$$\frac{1}{a + b\sqrt{p}} = \frac{1}{a + b\sqrt{p}} \cdot \frac{a - b\sqrt{p}}{a - b\sqrt{p}} = \frac{a - b\sqrt{p}}{a^2 - b^2 p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$$

onde $(a^2 - b^2 p) \neq 0$.
Logo, podemos concluir que $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ *é um corpo.*

Observação 1.1.3. *Toda a teoria de Álgebra Linear abordada nos cursos introdutórios tem sua versão mais geral em Álgebra abstrata (Teoria de grupos, anéis e corpos). Para os interessados em aprofundar seus conhecimentos, sugerimos que façam cursos de Álgebra oferecidos nos cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática, e os cursos de Álgebra Linear em Cursos de Verão que servem de nivelamento para a grande maioria dos programas de Pós-graduação em Matemática do país. Segue sugestão de leitura, como orientação inicial:*

Sugestão de leitura

1. ***LANG***, *Serg. Estruturas Algébricas. Tradutor: Prof. Cláudio R. W. Abramo. Rio de Janeiro, Ao livro técnico; Brasília, Instituto Nacional do Livro, 1972.*

1.2 Matrizes

Definição 1.2.1. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. $a \in \mathbb{K}$ é dito escalar.*

Definição 1.2.2. *Uma tabela com escalares dispostos em m linhas e n colunas é dita matriz de ordem $m \times n$. Notação:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

onde a_{ij} é o termo que está na linha i e coluna j.

Definição 1.2.3. ***Matrizes especiais:*** *Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$*

1. *A é dita matriz nula se $a_{ij} = 0\ \forall i, \forall j$.*
2. *A é dita matriz coluna se $n = 1$.*
3. *A é dita matriz linha se $m = 1$*
4. *A é dita matriz quadrada se $n = m$*

Observação 1.2.4. *Quando $n = m = 1$, A é dita matriz escalar.*

Definição 1.2.5. ***Matrizes quadradas especiais:*** *Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$.*

1. *A é dita matriz identidade se $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$ $\forall i = 1 \cdots n$.*
2. *A é dita matriz simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$.*
3. *A é dita matriz diagonal se $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$.*
4. *A é dita matriz triangular:*
   (a) *Superior se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$.*

(b) *Inferior se* $a_{ij} = 0$ *quando* $i < j$.

Definição 1.2.6. ***(Adição)*** *Sejam* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{m\times n}$.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

é definida como a matriz soma das matrizes A *e* B.

Propriedades: *Dadas* A, B *e* C, *matrizes de mesma ordem* $m \times n$ *temos:*

1. $A + B = B + A$ (***propriedade comutativa***).
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (***propriedade associativa***).
3. $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$, *onde* $\mathbf{0}$ *denota a matriz nula de ordem* $m \times n$.

Definição 1.2.7. ***(Subtração)*** *Sejam* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{m\times n}$.

$$A - B := A + (-B) = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$

é definida como a matriz diferença das matrizes A *e* B.

A matriz $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ *é tal que* $A - A = \mathbf{0} = -A + A$, *e é chamada de inverso aditivo de* A.

Definição 1.2.8. ***(Multiplicação por escalar)*** *Seja* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $k \in \mathbb{K}$ *escalar, então definimos uma nova matriz*

$k \cdot A = [ka_{ij}]_{m\times n}$.

Propriedades: *Dadas* A, B *matrizes de mesma ordem* $m \times n$ *e números* k, k_1 *e* $k_2 \in \mathbb{K}$, *temos:*

1. $k(A + B) = kA + kB$.
2. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$.
3. $0 \cdot A = \mathbf{0}$, *isto é, se multiplicarmos o elemento neutro da adição, o zero, por qualquer matriz* A, *obteremos a matriz nula.*

4. $k_1(k_2A) = k_1k_2A$.

Definição 1.2.9. ***(Transposição)*** *Dada uma matriz* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$*, definimos a matriz* $A^t = [b_{ij}]_{n\times m}$ *onde* $b_{ij} = a_{ji}$*. A matriz* A^t *é denominada transposta de A.*

Propriedades: *Dadas* A, B *matrizes de mesma ordem,* $m \times n$*, e* $k \in \mathbb{K}$ *temos:*

1. $(A^t)^t = A$.

2. $(A + B)^t = A^t + B^t$.

3. $(kA)^t = kA^t$.

Observação 1.2.10. *Uma matriz quadrada A é simétrica se, e somente se, ela é igual a sua transposta, ou seja,* $A = A^t$.

Definição 1.2.11. ***(Multiplicação de Matrizes)*** *Dadas* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$*,* $B = [b_{ij}]_{n\times p}$*. Definimos*
$AB = [c_{ij}]_{m\times p}$*, onde* $c_{rs} = \sum_{q=1}^{n} a_{rq}b_{qs} = a_{r1}b_{1s} + a_{r2}b_{2s} + \cdots + a_{rn}b_{ns}$.

Observação 1.2.12. *Só podemos efetuar o produto de duas matrizes* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$*, e* $B = [b_{ij}]_{s\times p}$ *se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, ou seja, se* $n = s$.

Propriedades: *Dadas* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$*,* $B = [b_{ij}]_{n\times p}$*,* $C = [c_{ij}]_{n\times p}$*,* $D = [d_{ij}]_{m\times n}$*,* $E = [e_{ij}]_{n\times r}$ *e* $F = [f_{ij}]_{p\times s}$ *, temos:*

1. $AI_n = I_mA = A$ *onde* I_n *e* I_m *são matrizes identidade de ordem n e m respectivamente.*

2. $A(B + C) = AB + AC$ *(distributividade à esquerda da multiplicação, em relação à soma).*

3. $(A + D)E = AE + BE$ *(distributividade à direita da multiplicação, em relação à soma).*

4. $(AB)F = A(BF)$ *(associatividade).*

5. $(AB)^t = B^t A^t$.

6. $\boldsymbol{0} \cdot A = \boldsymbol{0}$ *e* $A \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$, *onde* $\boldsymbol{0}$ *indica a matriz nula.*

Observação 1.2.13. *Em geral, não vale a propriedade comutativa para multiplicação de matrizes, ou seja, sejam* $A_{m\times n}$ *e* $B_{n\times r}$ *matrizes* AB *não é necessariamente igual a* BA.

Definição 1.2.14. ***(Determinante)*** *Seja* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *uma matriz quadrada de ordem* n.

O determinante de A *denotado por* $\det(A)$ *ou* $|A|$ *é definido da seguinte maneira:*

$\det[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ *onde* $J = J(j_1, \cdots, j_n)$ *é o número de inversões da permutação* $j_1, \cdots, j_n$ *e* ρ *indica que a soma é estendida a todas as* $n!$ *permutações de* $(1, \cdots, n)$.

Propriedades: *Dadas* A *e* B *matrizes quadradas de mesma ordem, temos:*

1. *Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz* A *são nulos então* $\det(A) = 0$.

2. $\det(A) = \det(A^t)$.

3. *Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.*

4. *Uma vez trocada a posição de duas linhas (ou duas colunas), o determinante troca de sinal.*

5. *O determinante de uma matriz que tem duas linhas (colunas) iguais é zero.*

6. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

7. *A operação elementar (linha)* $kL_j + L_i \rightarrow L_i$ *onde* $k \neq 0, i \neq j$, *que significa substituir a linha i por k vezes a linha j mais a linha i, não altera o valor do determinante.*

8. *A operação elementar (linha)* $L_j + kL_i \rightarrow L_i$ *onde* $k \neq 0, i \neq j$, *que significa substituir a linha i por k vezes a linha i mais a linha j, altera o valor do determinante do fator k.*

9. *Se em uma matriz A, uma linha* L_i *é igual a* $rL_j + kL_t, i \neq j$ *e* $i \neq t$, *onde* L_j *é a j-ésima linha e* L_t *é a t-ésima linha, então* $\det(A) = 0$.

Observação 1.2.15. *De modo geral, o determinante da soma de duas matrizes não é igual à soma dos determinantes destas matrizes, ou seja, sejam* A *e* B *matrizes quadradas de mesma ordem,* $\det(A + B)$ *não é necessariamente igual a* $\det(A) + \det(B)$.

Teorema 1.2.16. ***(LAPLACE)*** *Seja* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *uma matriz quadrada de ordem n. Considere* A_{ij} *a matriz obtida matriz inicial A, retirando-se desta a i-ésima linha e j-ésima coluna.*

$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + \cdots a_{1n}\Delta_{1n}$ *onde* $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \mid A_{ij} \mid$.

Mais geralmente:

Para cada i, temos

$\det(A) = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots a_{in}\Delta_{in}$ *onde* $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \mid A_{ij} \mid$.

Para cada j,

$\det(A) = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots a_{nj}\Delta_{nj}$ *onde* $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \mid A_{ij} \mid$.

Definição 1.2.17. *Seja* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *uma matriz quadrada de ordem n. A matriz A é dita inversível (ou invertível) se existe uma matriz B, denotada por* A^{-1}, *de ordem* $n \times n$, *tal que* $AB = BA = I_n$, *onde* I_n *é a matriz identidade de ordem n.*

Observação 1.2.18. *Seja* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *uma matriz quadrada de ordem n. Se existe C matriz de ordem n tal que* $CA = AC = I_n$ *então* $C = A^{-1}$, *ou seja, se existe a matriz inversa de uma matriz então ela é única.*

Teorema 1.2.19. *Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz quadrada de ordem n. A é inversível se, e somente se,* $\det(A) \neq 0$.

Definição 1.2.20. *Um matriz invertível P é dita ortogonal se* $P^t = P^{-1}$.

Definição 1.2.21. ***Equivalência de Matrizes por linhas***

Dizemos que um matriz A é equivalente por linhas a uma matriz B, e denotamos por $A \leftrightarrow B$ ou $A \sim B$, se a matriz B pode ser obtida da matriz A, a partir de uma seqüência de operações elementares listadas a seguir:

1. *Permutar (trocar) a linha i com a linha j .* ***Notação:*** $L_i \leftrightarrow L_j$.

2. *Multiplicação da linha i por um escalar não nulo k .*
   Notação: $kL_i \to L_i$.

3. *Substituição da linha i por k vezes a linha j somada a t vezes a linha i, onde $t, k \in K, t \neq 0$.* ***Notação:*** $kL_j + tL_i \to L_i$.

Definição 1.2.22. *(Forma Escada 1) Uma matriz $A_{m\times n}$ é dita matriz escalonada (ou matriz em forma de escada) se as condições abaixo são satisfeitas:*

1. *As linhas nulas, caso existam, localizam-se abaixo de todas as linhas não nulas.*

2. *O primeiro elemento não nulo da linha i está numa coluna anterior à do primeiro elemento da linha $i+1$, $(i < m)$.*

Definição 1.2.23. *(Forma Escada 2) Uma matriz $A_{m\times n}$ é dita linha reduzida à forma escada se:*

1. *O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.*

2. *Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.*

3. *Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.*

4. *Se as linhas $1, \cdots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_1, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.*

   Esta última condição impõe a forma escada à matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Proposição 1.2.24. *Uma matriz $A_{m\times n}$ é linha equivalente a uma matriz $B_{m\times n}$ se, e somente se, existe uma matriz inversível P de ordem m, tal que $A = P \cdot B$.*

Teorema 1.2.25. *Uma matriz A é inversível (ou invertível) se, se somente se, A é equivalente por linhas à matriz identidade. Além disso, a mesma sucessão de operações que transforma a matriz A na matriz identidade, transforma a matriz identidade na inversa de A.*

Teorema 1.2.26. *Toda matriz $A_{m\times n}$ é linha equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada.*

Definição 1.2.27. *Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Dizemos que A e B são semelhantes se existe P matriz invertível tal que $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.*

1.3 Exercícios Resolvidos

Exercício **1.3.1.** *Suponha que um corretor da Bolsa de Valores faça um pedido para comprar ações na segunda-feira, como segue: 400 quotas da ação A, 500 quotas da ação B e 600 quotas da ação C. As ações A, B e C custam por quota R\$ 500,00, R\$ 400,00 e R\$ 250,00, respectivamente.*

(a) Encontre o custo total das ações, usando multiplicação de matrizes.

(b) Qual será o ganho ou a perda quando as ações forem vendidas seis meses mais tarde se as ações A, B e C custarem R\$ 600,00, R\$ 350,00 e R\$ 300,00 por quota, respectivamente?

SOLUÇÃO

(a) Considere $M_Q = \begin{bmatrix} 400 & 500 & 600 \end{bmatrix}$ a matriz cujas entradas são as quantidades das quotas compradas das ações A, B e C, $M_C = \begin{bmatrix} 500 & 400 & 250 \end{bmatrix}$ a matriz cujas entradas são os valores de compra de cada ação A, B e C. Observe que $M_Q \cdot M_C^t$ representa o custo total gasto para comprar estas ações. O custo total das ações é R\$ 550.000,00.

(b) Considere $M_V = \begin{bmatrix} 600 & 350 & 300 \end{bmatrix}$ a matriz cujas entradas são os valores dos preços de venda das ações A, B e C. Seja $M_L = M_Q \cdot (M_V - M_C)^t$ a matriz que representa o lucro total. Portanto, o lucro total foi de R\$ 45.000,00.

Ver Apêndice. ■

Exercício 1.3.2. *Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade de material empregada em cada tipo de casa é dada pela matriz:*

	Ferro	*Madeira*	*Vidro*	*Tinta*	*Tijolo*
Moderno	5	20	16	7	17
Mediterrâneo	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

(Qualquer coincidência dos números com a realidade é mera coincidência).

(a) Se ele vai construir 5, 7 e 12 casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material são empregadas?

(b) Suponha agora que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam, respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10 u.c.p.. Qual é o preço unitário de cada tipo de casa?

(c) Qual é o custo total do material empregado?

SOLUÇÃO

Considere $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix}$

(a) As entradas c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15} da matriz

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 146 & 526 & 260 & 158 & 388 \end{bmatrix}$$

são as quantidades dos materiais ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo empregados na construção, respectivamente.

(b) Considere $H = \begin{bmatrix} 15 & 8 & 5 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ a matriz cujas entradas representam o preço por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo, respectivamente; e

$$E = B^t = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 20 & 18 & 25 \\ 16 & 12 & 8 \\ 7 & 9 & 5 \\ 17 & 21 & 13 \end{bmatrix};$$

Temos: $F = H \cdot E = \begin{bmatrix} 492 & 528 & 465 \end{bmatrix}$, as entradas f_{11}, f_{12} e f_{13} representam o preço unitário das casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente.

(c) O custo total será dado pelo produto matricial:

$$F \cdot A^t = \begin{bmatrix} 492 & 528 & 465 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix} = 11736,$$

ou seja, o custo total da construção será R$ 11.736,00. ■

Exercício **1.3.3.** *Existem três marcas de automóveis disponíveis no mercado: o Jacaré, o Piranha e o Urubu. O termo a_{ij} da matriz **A** abaixo é a probabilidade de que um dono de carro da linha i mude para o carro da coluna j, quando comprar um carro novo.*

			Para	
		J	P	U
	J	$0,7$	$0,2$	$0,1$
De	P	$0,3$	$0,5$	$0,2$
	U	$0,4$	$0,4$	$0,2$

Os termos da diagonal de $A = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}$ *dão a probabilidade* a_{ii}

de se comprar um carro novo da mesma marca.

$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{59}{100} & \frac{7}{25} & \frac{13}{100} \\ \frac{11}{25} & \frac{39}{100} & \frac{17}{100} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} & \frac{4}{25} \end{bmatrix}$. *Os termos de* A^2, $a_{ij}^{(2)}$, *significam mudar da marca i para a marca j depois de duas compras:*

SOLUÇÃO:

(a) De fato, a probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca J mudar para um outro carro desta mesma marca, ou seja J, depois de duas compras é:

$$J \xrightarrow{\frac{7}{10}} J \xrightarrow{\frac{7}{10}} J \quad \Big| \quad J \xrightarrow{\frac{2}{10}} P \xrightarrow{\frac{3}{10}} J \quad \Big| \quad J \xrightarrow{\frac{1}{10}} U \xrightarrow{\frac{4}{10}} J$$

Daí, $\frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{59}{100} = a_{11}^{(2)}$.

(b) A probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca J mudar para um outro carro da marca P depois de duas compras é:

$$J \xrightarrow{\frac{7}{10}} J \xrightarrow{\frac{2}{10}} P \quad \Big| \quad J \xrightarrow{\frac{2}{10}} P \xrightarrow{\frac{5}{10}} P \quad \Big| \quad J \xrightarrow{\frac{1}{10}} U \xrightarrow{\frac{4}{10}} P$$

Daí, $\frac{7}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{28}{100} = a_{12}^{(2)}$.

(c) A probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca J mudar para um outro carro da marca U depois de duas compras é:

$$J \xrightarrow{\frac{7}{10}} J \xrightarrow{\frac{1}{10}} U \quad \Big| \quad J \xrightarrow{\frac{2}{10}} P \xrightarrow{\frac{2}{10}} U \quad \Big| \quad J \xrightarrow{\frac{1}{10}} U \xrightarrow{\frac{2}{10}} U$$

Daí, $\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{1}{10}+\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{2}{10}+\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{2}{10}=\dfrac{13}{100}=a_{13}^{(2)}$.

(d) A probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca P mudar para um outro carro da marca J depois de duas compras é:

$$P \xrightarrow{\frac{3}{10}} J \xrightarrow{\frac{7}{10}} J \quad\Big|\quad P \xrightarrow{\frac{5}{10}} P \xrightarrow{\frac{3}{10}} J \quad\Big|\quad P \xrightarrow{\frac{2}{10}} U \xrightarrow{\frac{4}{10}} J$$

Daí, $\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{7}{10}+\dfrac{5}{10}\cdot\dfrac{3}{10}+\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{4}{10}=\dfrac{44}{100}=a_{21}^{(2)}$.

(e) A probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca P mudar para um outro carro desta mesma marca, ou seja, P, depois de duas compras é:

$$P \xrightarrow{\frac{3}{10}} J \xrightarrow{\frac{2}{10}} P \quad\Big|\quad P \xrightarrow{\frac{5}{10}} P \xrightarrow{\frac{5}{10}} P \quad\Big|\quad P \xrightarrow{\frac{2}{10}} U \xrightarrow{\frac{4}{10}} P$$

Daí, $\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{2}{10}+\dfrac{5}{10}\cdot\dfrac{5}{10}+\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{4}{10}=\dfrac{39}{100}=a_{22}^{(2)}$.

(f) A probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca P mudar para um outro carro da marca U depois de duas compras é:

$$P \xrightarrow{\frac{3}{10}} J \xrightarrow{\frac{1}{10}} U \quad\Big|\quad P \xrightarrow{\frac{5}{10}} P \xrightarrow{\frac{2}{10}} U \quad\Big|\quad P \xrightarrow{\frac{2}{10}} U \xrightarrow{\frac{2}{10}} U$$

Daí, $\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{1}{10}+\dfrac{5}{10}\cdot\dfrac{2}{10}+\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{2}{10}=\dfrac{17}{100}=a_{23}^{(2)}$.

(g) A probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca U mudar para um outro carro da marca J depois de duas compras é:

$$U \overset{\frac{4}{10}}{\underset{\to}{10}} J \quad \overset{\frac{7}{10}}{\to} \quad J \;\Big|\; U \overset{\frac{4}{10}}{\to} P \overset{\frac{3}{10}}{\to} J \;\Big|\; U \overset{\frac{2}{10}}{\to} U \overset{\frac{4}{10}}{\to} J$$

Daí, $\frac{4}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{48}{100} = a_{31}^{(2)}$.

(h) A probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca U mudar para um outro carro da marca P depois de duas compras é:

$$U \overset{\frac{4}{10}}{\to} J \overset{\frac{2}{10}}{\to} P \;\Big|\; U \overset{\frac{4}{10}}{\to} P \overset{\frac{5}{10}}{\to} P \;\Big|\; U \overset{\frac{2}{10}}{\to} U \overset{\frac{4}{10}}{\to} P$$

Daí, $\frac{4}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{36}{100} = a_{32}^{(2)}$.

(i) A probabilidade de tendo inicialmente um carro da marca U mudar para um outro carro da marca U depois de duas compras é:

$$U \overset{\frac{4}{10}}{\to} J \overset{\frac{1}{10}}{\to} U \;\Big|\; U \overset{\frac{4}{10}}{\to} P \overset{\frac{2}{10}}{\to} U \;\Big|\; U \overset{\frac{2}{10}}{\to} U \overset{\frac{2}{10}}{\to} U$$

Daí, $= \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{16}{100} = a_{33}^{(2)}$. ■

Exercício **1.3.4.** *Uma rede de comunicação tem cinco locais com transmissão de potências distintas. Estabelecemos que $a_{ij} = 1$, na matriz abaixo, significa que a estação i pode transmitir diretamente à estação j, $a_{ij} = 0$ significa que a transmissão da estação i não alcança a estação j. Observe que a diagonal principal é nula, significando que uma estação não transmite diretamente para si mesma.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $A^2 = [c_{ij}]$.

(b) Qual seria o significado da matriz c_{42}?

(c) Qual o significado de $c_{13} = 2$*?*

(d) Discuta o significado dos termos nulos, iguais a 1 e maiores que 1 de modo a justificar a afirmação: "A matriz A^2 *representa o número de caminhos disponíveis para se ir de uma estação a outra com uma única retransmissão".*

(e) Qual o significado das matrizes $A + A^2$, A^3 *e* $A + A^2 + A^3$*?*

(f) Se A fosse simétrica, o que significaria?

SOLUÇÃO:

(a) (Ver Apêndice.)

(b) Seja $A^2 = [c_{ij}]$. Calculemos o elemento

$$c_{42} = \sum_{k=1}^{5} a_{4k}a_{k2} = 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 1.$$

Note que a única parcela não nula veio de $a_{43} \cdot a_{32} = 1 \cdot 1$. Isto significa que a estação 4 transmite para a estação 2 através de uma retransmissão pela estação 3, embora não exista uma transmissão direta de 4 para 2.

(c) $c_{13} = \sum_{k=1}^{5} a_{1k}a_{k3} = 0+1+0+1+0$, onde $a_{12}a_{23} = 1 = a_{14}a_{43}$. Ou seja, para a estação 1 transmitir para a estação 3, pode transmitir para a estação 2 e a estação 2 retransmitir para a estação 3, ou transmitir para a estação 4 e a estação 4 retransmitir para a estação 3.

(d) Observemos que as entradas de A^2, $a_{ij}^{(2)}$, são dadas por:

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}.$$

Então, uma estação i pode utilizar uma estação k para que esta transmita para uma estação j, e isto só será possível se i transmite diretamente para k, e k transmite diretamente para a estação j, caso contrário a estação k não será contada como uma possibilidade de ligação entre as estações i e j.

Esquema:

$$\begin{array}{ccccc} & & k & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ i & & & & j \end{array}$$

Observemos ainda que as entradas da matriz A são 0 ou 1.

Considere a_{ik} = possibilidade da estação i transmitir para a estação k.

Considere a_{kj} = possibilidade da estação k transmitir para a estação j.

Daí, o número de possibilidades da estação i transmitir, com apenas uma retransmissão, para uma estação j é :

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}.$$

Ver o item (b).

(e)

(i) $A + A^2 = B$. As entradas b_{ij} significam o número de possibilidades de ir de uma estação i para uma estação j , transmitindo diretamente ou com apenas uma única retransmissão.

(ii) $A^3 = D$. As entradas d_{ij} significam o número de possibilidades de ir de uma estação i para uma estação j , com exatamente duas retransmissões.

(iii) $A+A^2+A^3 = E$. As entradas e_{ij} significam o número de possibilidades de ir de uma estação i para uma estação j , transmitindo diretamente , com apenas uma única retransmissão ou com exatamente duas retransmissões.

Como A é uma matriz cujas entradas são 0 ou 1, o fato de A ser simétrica significaria que a estação i transmite diretamente para uma estação j se, e somente se, a estação j transmite diretamente para a estação i. ■

Exercício **1.3.5.** *Em cada item a seguir, classifique as afirmações em verdadeiras ou falsas. Mostre caso a afirmação seja verdadeira ou dê um contra-exemplo, caso a afirmação seja falsa.*
Considere $A_n(\mathbb{K})$, $B_n(\mathbb{K})$ *e* $P_n(\mathbb{K})$ *onde* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

(a) Se $\det(A) = 1$ *então* $A^{-1} = A$.

(b) Se A é uma matriz triangular, então $\det(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

(c) $\det(kA) = k^n \cdot \det(A)$, $k \in \mathbb{K}$ *é uma constante.*

(d) Se $A^2 = A$, *e* $A \neq I_n$ *então* $\det(A) = 0$.

(e) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(f) Se $B = P^{-1}AP$ *então* $\det(B) = \det(A)$.

RESPOSTA:

(a) FALSA. Considere $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ sua inversa é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

(b) FALSA. Como conseqüência do Teorema de Laplace temos que: $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(c) VERDADEIRA. Conseqüência do Teorema de Laplace.

(d) VERDADEIRA. Como $A^2 = A \Leftrightarrow A(A - I_n) = 0$. Daí, se $\det(A) \neq 0$ segue que $\exists A^{-1}$ e portanto teríamos $A = I_n$.

(e) FALSA. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Observe que $\det(A + B) = 1$ e $\det(A) = \det(B) = 0$.

(f) VERDADEIRA. Use que: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ e que $\det(P) = \det(P^{-1})^{-1}$. Observe que neste item estamos supondo que P é uma matriz inversível, ou seja, $\det(P) \neq 0$ ■.

Exercício **1.3.6.** *Calcular o determinante da matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_3 - 2L_1 \to L_3 \\ L_4 - L_1 \to L_4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{2L_3 + L_2 \to L_3 \\ L_4 + L_2 \to L_4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Observemos que ao escalonarmos a matriz realizamos a operação elementar $2L_3 + L_2 \to L_3$, alteramos o determinante da matriz do estágio anterior à operação, e portanto o

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = -30.$$

Observação 1.3.1. *As operações elementares* $\begin{cases} L_4 + L_2 \to L_4 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \\ L_4 - L_1 \to L_4 \end{cases}$ *não alteraram o determinante da matriz do estágio anterior à respectiva operação.*

■

Observação 1.3.2. *A operação elementar (linha)* $kL_j + L_i \to L_i$ *onde* $k \neq 0, i \neq j$, *que significa substituir a linha* i *por* k *vezes a linha* j

mais a linha i, não altera o valor do determinante. A operação elementar $L_i \leftrightarrow L_j$, permutação da linha i com a linha j, $i \neq j$, altera o determinate que estamos calculando, do fator (-1). Caso façamos um número par de permutações, o determinante não será alterado. A operação elementar $L_j + kL_i \rightarrow L_i$ onde $k \neq 0, i \neq j$, que significa substituir a linha i por k vezes a linha i mais a linha j, altera o valor do determinante do fator k. Ver propriedades do determinante.

Exercício 1.3.7. *Chama-se posto de uma matriz ao número máximo de linhas linearmente independentes que ela possui. Dado o sistema homogêneo*

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \ , \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}$$

prove que suas soluções formam um plano passando pela origem, uma reta passando pela origem ou se reduzem a um só ponto (a origem), conforme a matriz dos coeficientes tenha posto 1, 2 ou 3.

SOLUÇÃO

O posto da matriz será 1 se , e somente se, os vetores normais dos planos (cada linha do sistema acima é uma equação de um plano que passa pela origem) são paralelos e neste caso a interseção, ou seja, a solução do sistema será um plano que passa pela origem.

O posto da matriz será 2 se, e somente se, temos um e apenas um vetor normal como combinação linear dos outros dois e isto acontece se, e somente se, a solução é uma reta.

O posto da matriz será 3 se, e somente se, os três vetores normais são linearmente independentes e neste caso, a solução é um ponto.

■

Observação 1.3.3. *Convém observar que sistemas de equações lineares à 03 incógnitas podem ser resolvidos apenas com a teoria desenvolvida em*

Geometria Analítica.

Exercício **1.3.8.** *Determine os valores de x e y tais que a matriz abaixo seja ortogonal*

$$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 6 & x \\ 3 & 2 & y \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO:
Para que A seja ortogonal deveremos ter $A^{-1} = A^t$.

$$A \cdot A^t = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 6 & x \\ 3 & 2 & y \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ x & y & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 45 \text{ e } 6x + 2y = 6 \Leftrightarrow x = 3 \text{ e } y = -6. \quad \blacksquare$$

Exercício **1.3.9.** *Seja m uma matriz ortogonal 2 x 2, prove que existe $\theta \in R$ tal que:*

$$m = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad ou \quad m = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

conforme seja $\det(m) = 1$ *ou* $\det(m) = -1$.

SOLUÇÃO:
Como $m = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ é ortogonal segue que $m^{-1} = m^t = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$. Portanto $x^2 + y^2 = 1 = z^2 + w^2$ e $xz + yw = 0$. Observemos que $y = 0$ se, e somente se, $z = 0$ e $x = \pm w \neq 0$ ($x = 0$ se, e somente se, $w = 0$ e $y = \pm z \neq 0$). Daí se $y = 0$ temos $m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Raciocínio análogo para o caso onde $x = 0$.

Vamos analisar o caso onde $x \cdot y \cdot z \cdot w \neq 0$. Neste caso teríamos $x = w$ e $y = -z$ ou $x = -w$ e $y = z$. ■

1.4 Exercícios Propostos

1) Mostre que $\begin{bmatrix} \text{sen}\,^2\alpha & \text{sen}\,^2\beta & \text{sen}\,^2\gamma \\ \cos\,^2\alpha & \cos\,^2\beta & \cos\,^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ não é invertível, para quaisquer valores de $\alpha,\ \beta$ e γ.

2) Mostre que o determinante da matriz seguinte é igual a λ^6 :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & 3 & 3 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & 4 & 4 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & 5 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & \lambda+5 \end{bmatrix}$$

3) Seja $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{ sen }\theta \\ \text{sen }\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Obter uma fórmula para A^n.

4) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mostre que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e determine uma expressão geral para A^n por indução.

5) Dizemos que uma matriz B é uma raiz quadrada de uma matriz A se $B^2 = A$. Encontre as raízes quadradas de $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

6) Ache todas as matrizes quadradas 2×2 que são soluções da equação matricial $X^2 = I_2$, onde I_2 é a matriz identidade 2×2.

7) Ache todas as matrizes quadradas $A,\ 2 \times 2$, tais que $A^2 = A$.

8) Sabendo que $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ e $\det(A) = 5$ calcule:

$(a)\ \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ $\quad(b)\ \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$ $\quad(c)\ \det 3A$

$(d)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-5a & e-5b & f-5c \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}$ $\quad(e)\ \det[(2A)^{-1}]$ $\quad(f)\ \det(2A^{-1})$

$(g)\ \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ $\quad(h)\ \begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix}$

9) Resolva as equações:

$(a)\ \begin{vmatrix} -3 & 0 & x^2-1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 2 \\ x+2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad(b)\ \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ x-1 & x & -3 \\ 1 & x+2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$(c)\ \begin{vmatrix} x & x & x \\ x & x & 2 \\ x & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

10) Uma matriz $A\ (3 \times 3)$ tem a propriedade que $[A^2]_{ij} = i\delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. Escreva A^2 e calcule $\det\left(\dfrac{A^6}{2\sqrt{10}}\right)$.

11) A matriz B foi obtida a partir da matriz $A\ (4 \times 4)$ através das seguintes operações elementares:

- Multiplicação da linha L_1 por 2.
- Troca da linha L_2 pela linha L_3.
- Substituição da linha L_4 por $L_4 + 2L_1$.

(a) Sabendo que $\det A = 1$, calcule $\det\ B$.

(b) Se $C = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 13 & \pi \\ 0 & -1 & 0,1 & -5 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, calcule $\det(BC^{-1}B^t)$.

12) Calcular o determinante da matriz X, sabendo-se que $AXB = C$, onde

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \ \det(AC^{-1}) = 2 \quad \text{e} \quad \det(B^tC^t) = 1.$$

13) Seja B uma matriz 3×3 tal que

$$B^3 + 5B - 2I = 0 \text{ e } B^2 = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 8 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que B é inversível

(b) Determine B^{-1}

(c) Determine B

14) Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou, às vezes, falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo:

(a) As expressões $\mathrm{tr}(AA^t)$ e $\mathrm{tr}(A^tA)$ estão sempre definidas, independente do tamanho de A.

(b) Se A é uma matriz quadrada e A^2 tem uma coluna toda constituída de zeros, então, necessariamente, A tem uma coluna toda constituída de zeros.

(c) $\det(2A) = 2\det(A)$

(d) Sejam A e B matrizes. Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.

(e) É possível termos AB simétrica com A e B matrizes quadradas não simétricas?

15) Suponha que em 2001 a distribuição de áreas ocupadas em uma

cidade de 130 km^2 é:

- I (uso residencial) 30%
- II (uso comercial) 20%
- III (uso industrial) 50%

Encontre as percentagens de distribuição dessas áreas nos anos de 2006 e 2011, assumindo que as probabilidades de transição para intervalos de 5 anos são dadas pela seguinte matriz:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,0 & 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}$$

onde a_{ij} representa a fração da área do tipo i que deverá se tornar do tipo j no intervalo de 5 anos.

16. O traço de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é a soma $tr(A) = = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ dos elementos da diagonal. Seja $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz quadrada de ordem n. Prove que $tr(AB) = tr(BA)$ e conclua que matrizes semelhantes têm o mesmo traço.

17. Seja $m \in \mathbb{N}$. Calcule $(B^{-1} \cdot A \cdot B)^m$, onde A e B são matrizes quadradas de mesma ordem.

1.5 Apêndice

1. Podemos utilizar um Software computacional, por exemplo o MAPLE, para facilitar os cálculos:

   (a) [> with(LinearAlgebra);
   [> A := Matrix([[400, 500, 600]]);
   A := [400 500 600]
   [> B := Matrix([[500, 400, 250]]);
   B := [500 400 250]
   [> A.Transpose(B);
   [550000]
   [> C:=Transpose(B);
   [> R:=A.C;
   R := [550000];
   Daí, segue que o custo total das ações é R$550.000,00.

   (b) Utilizando o Software computacional MAPLE, temos:
   [> with(LinearAlgebra);
   [> F:= Matrix([[600, 350, 300]]);
   F := [600 350 300]
   [> G:= F-B;
   G := [100 -50 50]
   [> R:=A.Transpose(G);
   R := [45000]
   Portanto, o lucro total foi de R$ 45.000,00.

2. Utilizando o Software computacional MAPLE, temos:
   [> with(LinearAlgebra);

   (a) [> A:= Matrix([[0,1,1,1,1], [1, 0, 1, 1, 0], [0, 1, 0, 1, 0], [0, 0, 1, 0, 1], [0, 0, 0, 1, 0]]);

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[> A . A;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) [> A . A. A;

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

[> A + A . A;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[> A + A. A + A. A. A;

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Vandermond

Objetivo: Provar, usando indução, que o determinante da matriz de Vandermond,

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \text{ é igual ao produto } \prod_{1 \le r < s \le n} (a_s - a_r).$$

Dica: Assumindo que o resultado vale para todo n, considere o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n} \\ 1 & a_{n+1} & \cdots & a_{n+1}^{n} \end{vmatrix}$$

Mostre que este é igual a $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & f(a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & f(a_n) \\ 1 & a_{n+1} & \cdots & f(a_{n+1}) \end{vmatrix}$

Para qualquer polinômio mônico f sobre $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de grau n. Escolha f de maneira que o determinante seja mais fácil de ser calculado.

Capítulo 2

Sistemas Lineares

Seja $\mathbb{K}$ um corpo.

Definição 2.0.1. *Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:*

$$(\Upsilon)\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

com $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Uma solução do sistema (Υ) *é uma n-upla de escalares* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *que satisfaça simultaneamente estas m equações.*

Podemos escrever o sistema (Υ) *sob a forma matricial.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou $AX = B$ *onde* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ *é a matriz dos coeficientes*

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ *é a matriz das incógnitas e* $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ *é a matriz dos termos independentes.*

Podemos definir uma outra matriz associada ao sistema (Υ)*:*

a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ *é dita matriz ampliada do sistema.*

Definição 2.0.2. *Dois sistemas de equações dão ditos equivalentes se, e somente se, toda solução de qualquer um dos dois sistemas é também solução do outro.*

Notação: *escrevemos* $\Upsilon \sim \Gamma$, *ou* $\Upsilon \Leftrightarrow \Gamma$ *para indicar que os sistemas lineares* Υ *e* Γ *são equivalentes.*

Teorema 2.0.3. *Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas linha equivalentes são equivalentes.*

Definição 2.0.4. ***Classificação de um sistema linear***

1. *Um sistema linear é dito impossível (ou incompatível) quando não possui solução.*

2. *Um sistema linear é dito possível (ou compatível) quando possui solução.*

   Um sistema possível pode ser:

(a) determinado: se possui uma única solução;

(b) indeterminado: se possui infinitas soluções.

Definição 2.0.5. *Dada uma matriz* $A_{m\times n}$, *seja* $B_{m\times n}$ *a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a* A. *O posto de* A, *denotado por* p, *é o número de linhas não nulas de* B. *A nulidade de* A *é o número* $n - p$.

Proposição 2.0.6. ***(Posto)*** *Duas matrizes linha equivalentes têm o mesmo posto.*

Teorema 2.0.7.

1. *Um sistema de* m *equações e* n *incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes. E, portanto, o sistema será possível.*

2. *Se as duas matrizes (ampliada e coeficientes) têm o mesmo posto* p *e* $p = n$ *a solução do sistema será única, ou seja, o sistema será possível e determinado.*

3. *Se as duas matrizes (ampliada e coeficientes) têm o mesmo posto* p *e* $p < n$, *então podemos escolher* $n - p$ *incógnitas (como as incógnitas independentes), e as outras* p *incógnitas serão dadas em função destas* $n - p$ *incógnitas escolhidas incialmente.*

2.1 Exercícios Resolvidos

Exercício 2.1.1. *Para cada um dos sistemas a seguir, decida se existem ou não soluções. No caso afirmativo, exiba todas as soluções do sistema em termos de um ou dois parâmetros independentes.*

$a)\begin{cases} x+2y+3z &= 4 \\ 2x+3y+4z &= 5 \end{cases}$ $\quad b)\begin{cases} 2x-y+5z &= 3 \\ 4x-2y+10z &= 5 \end{cases}$

$c)\begin{cases} 6x-4y+12z &= 2 \\ 9x-6y+18z &= 3 \end{cases}$

SOLUÇÃO

(a) Observe que os vetores normais dos planos, obtidos pelas equações do sistema, não são paralelos, portanto, a solução do sistema (que é a interseção destes planos) é a reta $r := \{P = $
$= (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) = (-2,3,0) + t(1,-2,1), t \in \mathbb{R}\}$.

(b) Observe que os vetores normais dos planos, obtidos pelas equações do sistema, são paralelos e como $2.3 \neq 5$ então os planos não são coincidentes e portanto a solução do sistema (que é a interseção destes planos) é o conjunto vazio.

(c) Observe que os vetores normais dos planos, obtidos pelas equações do sistema, são paralelos e $9.2 = 6.3$ e portanto os planos são coincidentes. E a solução do sistema é qualquer um destes planos, ou seja, $\{P = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) =$
$= (\frac{2y}{3} - 2z + \frac{1}{3}, y, z)\} = \{P = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 6x - 4y + 12z = 2\} =$
$= \{P = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 9x - 6y + 18z = 3\}$. ■

Observação 2.1.1. *Sistemas Lineares à 03 incógnitas podem ser resolvidos apenas com a teoria desenvolvida em Geometria Analítica.*

Exercício **2.1.2.** *Dispondo de três ligas L_1, L_2, L_3, cujas percentagens de ouro e prata são dadas na tabela abaixo, quero obter 100g de uma liga L_4 formada por igual quantidade de ouro e prata. Desejo fazer isso de modo a usar o máximo possível da liga L_1. Quantos gramas devo tomar de cada liga?*

	L_1	L_2	L_3
ouro	*30%*	*40%*	*80%*
prata	*70%*	*60%*	*20%*

RESPOSTA:

Devemos colocar 60 g de L_1, 0 g de L_2, 40 g de L_3.

Dica:

Analise o sistema: $$\begin{cases} x+y+z &= 100 \\ 3x+4y+8z &= 500 \\ 7x+6y+2z &= 500 \end{cases},$$

onde x, y e z representam as quantidades, em gramas, das ligas L_1, L_2 e L_3, respectivamente. ■

Exercício **2.1.3.** *Foram estudados três tipos de alimento. Fixada a mesma quantidade (1g) determinou-se que:*

(a) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C.

(b) O alimento II tem 2, 3 e 5 unidades, respectivamente, das vitaminas A, B e C.

(c) O alimento III tem 3 unidades de vitamina A, 3 de vitamina C e não contém vitamina B.

Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C,

(i) encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II, III, que fornecem a quantidade de vitaminas desejada.

(ii) Se o alimento I custa R$ 0,60 por grama e os outros dois custam R$ 0,10, existe uma solução custando exatamente R$ 1,00?

RESPOSTA:

(i) $\frac{5}{3} \leq z \leq \frac{8}{3}; \quad x = -5 + 3z; \quad y = 8 - 3z.$

(ii) $x = 1\text{g}; \quad y = z = 2\text{g}$, onde x, y, z representam as quantidades, em gramas, dos alimentos I, II, III, respectivamente.

Dica:

Analise o seguinte sistema: $\begin{cases} x + 2y + 3z &= 11 \\ 3x + 3y + 0z &= 9 \\ 4x + 5y + 3z &= 20 \end{cases}$
para solucionar o item i),onde x, y e z são os pesos, em gramas, dos alimentos I, II e III, respectivamente.

Analise o seguinte sistema: $\begin{cases} x + 2y + 3z &= 11 \\ 3x + 3y + 0z &= 9 \\ 6x + y + z &= 10 \end{cases}$
para solucionar o item ii), onde x, y e z os pesos, em gramas, dos alimentos I, II e III, respectivamente. ∎

Exercício **2.1.4.** *Determinar os valores de m e n para os quais o sistema*

$$\begin{cases} 2x - y + 3z &= 1 \\ x + 2y - z &= 4 \\ 3x + y + mz &= n \end{cases}$$

é:

(a) indeterminado

(b) impossível

SOLUÇÃO:
Aplicando o Método de Eliminação de Gauss (escalonamento) temos:

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 4 \\ 2x - y + 3z &= 1 \\ 3x + y + mz &= n \end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{\begin{matrix} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 3L_1 \to L_3 \end{matrix}} \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 0x - 5y + 5z = -7 \\ 0x - 5y + (m+3)z = n - 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 0x - 5y + 5z = -7 \\ 0x - 5y + (m+3)z = n - 12 \end{cases} \quad \underset{\Leftrightarrow}{L_3 - L_2 \to L_3}$$

$$\underset{\Leftrightarrow}{L_3 - L_2 \to L_3} \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 0x - 5y + 5z = -7 \\ 0x + 0y + (m-2)z = n - 5 \end{cases}$$

Portanto,

(a) O sistema acima é indeterminado para $m = 2$ e $n = 5$.

(b) O sistema acima é impossível para $m = 2$ e $n \neq 5$.

Outra maneira:

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & m \end{bmatrix}$ a matriz dos coeficientes

do sistema. Observe que o $\det(A) = -5(m-2)$, se $m \neq 2$ o sistema será possível e determinado. Portanto se $m = 2$ o sistema é não determinado (possível e indeterminado ou impossível). Pela Regra de Cramer podemos concluir que :
se os determinantes das matrizes

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ n & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & n & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & n \end{bmatrix}$$

forem zero teremos que o sistema é possível e indeterminado e, caso pelo menos um seja não nulo o sistema será impossível. ■

Exercício **2.1.5.** *Resolva o sistema abaixo, sabendo que* $0 < a < b < c$*:*

$$\begin{cases} ax + ay + cz &= a^2 + c^2 \\ bx - ay + cz &= c^2 - b^2 \\ ax + cy - bz &= a^2 - c^2 \end{cases} \qquad (1).$$

SOLUÇÃO:

Observe que: $P_0 = (a-b, b, c)$ é uma solução do sistema:

$$\begin{cases} ax + ay + cz &= a^2 + c^2 \\ bx - ay + cz &= c^2 - b^2 \end{cases}.$$

Observe que: $P_1 = \left(\dfrac{a^3 - a^2c - ac^2 - c^3}{a \cdot (a-c)}, \dfrac{2c^2}{(a-c)}, 0\right)$ é uma solução do sistema:

$$\begin{cases} ax + ay + cz &= a^2 + c^2 \\ ax + cy - bz &= a^2 - c^2 \end{cases}.$$

Sejam

$$\overrightarrow{v_0} = (a, a, c) \times (b, -a, c) \text{ e}$$

$$\overrightarrow{v_1} = (a, a, c) \times (a, c, -b).$$

Considere

$$r_0 = P_0 + m \cdot \overrightarrow{v_0} = (a - b, b, c) + m(2ac, bc - ac, -a^2 - ab).$$

$$\begin{aligned} r_1 &= P_1 + m \cdot \overrightarrow{v_0} = \\ &= \frac{\left(a^3 - a^2c - ac^2 - c^3, \frac{2c^2}{(a-c)}, 0\right)}{a \cdot (a - c)} + k(-ab - c^2, ba + ac, -a^2 + ac) \end{aligned}$$

Observe que a condição $0 < a < b < c$ garante que $r_0 \not\parallel r_1$.
Daí o sistema (1) é possível e determinado, ou seja, $\exists P = r_0 \cap r_1$.
Sejam m e k tal que :
$(a - b, b, c) + m(2ac, bc - ac, -a^2 - ab) =$

$$= \frac{\left(a^3 - a^2c - ac^2 - c^3, \frac{2c^2}{(a-c)}, 0\right)}{a \cdot (a - c)} + k(-ab - c^2, ba + ac, -a^2 + ac)$$

Daí,

$$m = \frac{-c^2 + ab}{2a^2c + bc^2 - ac^2 + a^2b + ab^2}.$$

e portanto,

$$P = (x_1, x_2, x_3)$$

onde:

$$x_1 = \frac{(-a^2c^2 + 2abc^2 - c^2b^2 + ba^3 - 2ac^3 - ab^3 + 2ca^3)}{2a^2c + bc^2 - ac^2 + a^2b + ab^2}$$

$$x_2 = \frac{(a^2bc + b^2c^2 + a^2b^2 + ab^3 - bc^3 + ac^3 - abc^2 + acb^2)}{2a^2c + bc^2 - ac^2 + a^2b + ab^2}$$

$$x_3 = \frac{(3a^2c^2 + bc^3 - ac^3 + a^2bc + acb^2 + abc^2 - ba^3 - a^2b^2)}{2a^2c + bc^2 - ac^2 + a^2b + ab^2} \blacksquare$$

Exercício **2.1.6.** *Resolva o sistema:* $\begin{cases} x + 3y + 5z + 7w &= 12 \\ 3x + 5y + 7z + w &= 0 \\ 5x + 7y + z + 3w &= 4 \\ 7x + y + 3z + 5w &= 16 \end{cases}$

SOLUÇÃO:

Escalonando (Método de Eliminação de Gauss) o sistema temos:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z + 7w = 12 \\ 3x + 5y + 7z + w = 0 \\ 5x + 7y + z + 3w = 4 \\ 7x + y + 3z + 5w = 16 \end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{\begin{matrix} 3L_1 - L_2 \to L_2 \\ 5L_1 - L_3 \to L_3 \\ 7L_1 - L_4 \to L_4 \end{matrix}}$$

$$\underset{\Leftrightarrow}{\begin{matrix} 3L_1 - L_2 \to L_2 \\ 5L_1 - L_3 \to L_3 \\ 7L_1 - L_4 \to L_4 \end{matrix}} \begin{cases} x + 3y + 5z + 7w = 12 \\ 0x + 4y + 8z + 20w = 36 \\ 0x + 8y + 24z + 32w = 56 \\ 0x + 20y + 32z + 44w = 68 \end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{\begin{matrix} 2L_2 - L_3 \to L_3 \\ 5L_2 - L_4 \to L_4 \end{matrix}}$$

$$\underset{\Leftrightarrow}{\begin{matrix} 2L_2 - L_3 \to L_3 \\ 5L_2 - L_4 \to L_4 \end{matrix}} \begin{cases} x + 3y + 5z + 7w = 12 \\ 0x + 4y + 8z + 20w = 36 \\ 0x + 0y + -8z + 8w = 16 \\ 0x + 0y + 8z + 56w = 112 \end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{L_3 + L_4 \to L_4}$$

$$L_3 + L_4 \to L_4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z + 7w = 12 \\ 0x + 4y + 8z + 20w = 36 \\ 0x + 0y + -8z + 8w = 16 \\ 0x + 0y + 0z + 64w = 128 \end{cases}$$

Portanto, $w = 2,\quad z = 0,\quad y = -1,\quad x = 1.$ ■

Exercício **2.1.7.** *Dado o sistema a seguir:*

$$\begin{cases} x + y + z + w & = & 0 \\ x + y + z - w & = & 4 \\ x + y - z + w & = & -4 \\ x - y + z + w & = & 2 \end{cases}$$

Determine:

(a) o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) se o sistema é possível e determinado, impossível ou possível e indeterminado.

SOLUÇÃO:

(a) Vamos utilizar o método de eliminação de Gauss (escalonamento) para calcular o determinante desta matriz,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{linha equivalente}}{\overset{\begin{array}{ccc} L_2 - L_1 & \to & L_2 \\ L_3 - L_1 & \to & L_3 \\ L_4 - L_1 & \to & L_4 \end{array}}{\longleftrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

portanto, $\det(A) = 8$. Observe que a operação elementar $L_2 \leftrightarrow L_4$, permutação da linha 2 com a linha 4, altera o determinante que estamos calculando, do fator (-1).

(b) Como A representa a matriz de coeficientes do sistema e $\det(A) \neq$ $\neq 0$ segue que o sistema é possível e determinado. Sendo a solução do sistema $x = 1, y = -1, z = 2, w = -2$. ■

Observação 2.1.2. *A operação elementar (linha) $kL_j + L_i \to L_i$ onde $k \neq 0, i \neq j$, que significa substituir a linha i por k vezes a linha j mais a linha i, não altera o valor do determinante. A operação elementar $L_i \leftrightarrow L_j$, permutação da linha i com a linha j, $i \neq j$, altera o determinate que estamos calculando, do fator* (-1). *Caso façamos um número par de permutações, o determinante não será alterado. A operação elementar $L_j + kL_i \to L_i$ onde $k \neq 0, i \neq j$, que significa substituir a linha i por k vezes a linha i mais a linha j, altera o valor do determinante do fator k. Ver propriedades do determinante.*

Exercício 2.1.8. *Combinando quartzo (SiO_2) com lixívia de sódio ($NaOH$) obtém-se silicato de sódio (Na_2SiO_3) e água (H_2O), na reação química indicada por*

$$xSiO_2 + yNaOH \to zNa_2SiO_3 + tH_2O$$

Os números naturais x, y, z e t devem ser tais que os elementos químicos Si, O, Na e H ocorram em iguais quantidades em ambos os lados da reação. Como podem esses números ser tomados de modo a se ter a "menor"reação química possível?

SOLUÇÃO:

$$\begin{cases} x &= z \\ y &= 2z \\ y &= 2t \\ 2x+y &= 3z+t \end{cases}$$

Portanto, $x = z = t$ e $y = 2z = 2t$. Como $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$, então, para tornar a reação a "menor"possível devemos ter $x = t = z = 1$ e $y = 2$. ■

Exercício 2.1.9. *Responda a questão análoga à questão anterior com respeito à reação*

$$xFeS + yO_2 \to zFe_2O_3 + tSO_2$$

(geração de dióxido de enxofre a partir da pirita).

SOLUÇÃO:

$$\begin{cases} x &= t \\ 2y &= 3z+2t \\ x &= 2z \end{cases}$$

Portanto, $x = t$ e $2y = 7z$. Como $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$ então para tornar a reação a "menor"possível devemos ter $x = t = 4$; $z = 2$ e $y = 7$. ■

Exercício **2.1.10.** *Aço fino é uma liga de ferro, cromo e níquel. Um exemplo é o aço V2A, que contém 74% de ferro, 18% de cromo e 8% de níquel. Na tabela abaixo, têm-se ligas I, II, III, IV, as quais devemos misturar para obter uma tonelada de aço V2A. Quantos quilos de cada uma dessas ligas devemos tomar?*

	I	*II*	*III*	*IV*
ferro	*70%*	*72%*	*80%*	*85%*
cromo	*22%*	*20%*	*10%*	*12%*
níquel	*8%*	*8%*	*10%*	*3%*

SOLUÇÃO:

$\frac{2000}{33} \leq w \leq 100$; $x = -1000 + \frac{33}{2}w$; $y = 2000 - 20w$, $z = \frac{5}{2}w$.

Dica:

Analise o seguinte sistema: $\begin{cases} x + y + z + w & = & 1000 \\ 70x + 72y + 80z + 85w & = & 74000 \\ 22x + 20y + 10z + 12w & = & 18000 \\ 8x + 8y + 10z + 3w & = & 8000 \end{cases}$

onde x, y, z e w são as quantidades, em quilos, das ligas I, II, III e IV, respectivamente. ∎

Exercício **2.1.11.** *A tabela abaixo exibe as porcentagens de albumina, carbohidrato e lipídio em cada um dos alimentos A, B e C. Mostre que não é possível combinar esses alimentos formando uma refeição que contenha 47% de albumina, 35% de carbohidrato e 18% de lipídio. Investigue se seria possível caso as exigências fossem 40% de albumina, 40% de carbohidrato e 20% de lipídio.*

	A	*B*	*C*
Albumina	*30%*	*50%*	*20%*
Carbohidrato	*30%*	*30%*	*70%*
Lipídio	*40%*	*20%*	*10%*

SOLUÇÃO:

Analisando o sistema: $\begin{cases} x+y+z &= w \\ 30x+50y+20z &= 47w \\ 30x+30y+70z &= 35w \\ 40x+20y+10z &= 18w \end{cases}$

onde x, y, z são os pesos, em uma determinada unidade, dos alimentos A, B e C, respectivamente, e w é o peso da refeição total, na mesma unidade que os pesos x, y e z

$$\text{obtemos } \begin{cases} -17x+3y-27z &= 0 \\ -5x-5y+35z &= 0 \\ 22x+2y-8z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -17x+3y-27z &= 0 \\ -5x-5y+35z &= 0 \\ 22x+2y-8z &= 0 \end{cases}$$

$$\text{obtemos } \begin{cases} -17x+3y-27z &= 0 \\ -5x-5y+35z &= 0 \\ 22x+2y-8z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -17x+3y-27z &= 0 \\ x+y-7z &= 0 \\ 22x+2y-8z &= 0 \end{cases}$$

daí $20x+6z=0$, o que é um absurdo, pois $x,y,z,w \in \mathbb{R}_+^*$.

Investigue se seria possível caso as exigências fossem 40% de albumina, 40% de carbohidrato e 20% de lipídio.

Analisando o sistema: $\begin{cases} x+y+z &= w \\ 30x+50y+20z &= 40w \\ 30x+30y+70z &= 40w \\ 40x+20y+10z &= 20w \end{cases}$

$$\text{obtemos } \begin{cases} -10x+10y-20z &= 0 \\ -10x-10y+30z &= 0 \\ 20x+0y-10z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &= 2x \\ y &= 5x \\ x &= \frac{w}{8} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Exercício **2.1.12.** *Sabe-se que uma alimentação equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina B, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E. Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados cinco alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) de cada alimento, determinou-se que:*

(a) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

(b) O alimento II tem 9 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 0 unidade de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 1 unidade de vitamina E.

(c) O alimento III tem 2 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B, 5 unidades de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

(d) O alimento IV tem 1 unidade de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 13 unidades de vitamina E.

(e) O alimento V tem 1 unidade de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 9 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

SOLUÇÃO:

Temos que usar 10, 10, 20, 20 e 10 unidades das vitaminas I, II, III , IV e V, respectivamente.

Dica: Analise o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 9y + 2z + w + t & = & 170 \\ 10x + y + 2z + w + t & = & 180 \\ x + 0y + 5z + w + t & = & 140 \\ 2x + y + z + 2w + 9t & = & 180 \\ 2x + y + 2z + 13w + 2t & = & 350 \end{cases}$$

onde x, y, z , w e t representam as unidades das vitaminas I, II, III , IV e V, respectivamente. ■

Exercício **2.1.13.**

Necessita-se adubar um terreno acrescentando a cada $10m^2$ 140g de nitrato, 190 g de fosfato e 205 g de potássio.
Dispõe-se de quatro qualidades de adubo com as seguintes características:

(a) Cada quilograma de adubo I custa 5 u.c.p e contém 10 g de nitrato, 10 g de fosfato e 100 g de potássio.

(b) Cada quilograma de adubo II custa 6 u.c.p e contém 10 g de nitrato, 100 g de fosfato e 30 g de potássio.

(c) Cada quilograma de adubo III custa 5 u.c.p e contém 50 g de nitrato, 20 g de fosfato e 20 g de potássio.

(d) Cada quilograma de adubo IV custa 15 u.c.p e contém 20 g de nitrato, 40 g de fosfato e 35 g de potássio.

Quanto de cada adubo devemos misturar para conseguir o efeito desejado se estamos dispostos a gastar 54 u.c.p. a cada 10 m^2 com a adubação?

SOLUÇÃO:
Devemos colocar

$$\frac{6451}{9619}kg, \frac{4381}{9619}kg, \frac{14396}{9619}kg, \frac{25927}{9619}kg$$

dos adubos I, II, III e IV, respectivamente.
Dica:

Analise o seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccc} x + y + 5z + 2w & = & 14000 \\ x + y + 2z + 4w & = & 19000 \\ 100x + 30y + 20z + 35w & = & 205000 \\ 5x + 6y + 5z + 15w & = & 54000 \end{array}\right.$$

onde x, y, z e w representam as quantidades, em gramas, dos adubos I, II, III e IV, respectivamente.

Analise o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + 5z + 2w & = & 14 \\ x + y + 2z + 4w & = & 19 \\ 100x + 30y + 20z + 35w & = & 205 \\ 5x + 6y + 5z + 15w & = & 54 \end{cases}$$

onde x, y, z e w representam as quantidades, em kilogramas, dos adubos I, II, III e IV, respectivamente. ■

2.2 Exercícios Propostos

1) Dado $a \in \mathbb{R}$, considere o sistema nas incógnitas x, y, z

$$\begin{cases} x & - & y & + & z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & 8z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & (a^2+5)z & = & a \end{cases}$$

Usando o método de eliminação de Gauss, determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais:

(a) o sistema não tem solução.

(b) o sistema tem solução única.

(c) o sistema tem infinitas soluções.

2) Considere o sistema

$$\begin{cases} 4x & + & y & + & z & + & w & = & 6 \\ 3x & + & 7y & - & z & + & w & = & 1 \\ 7x & + & 3y & - & 5z & + & 8w & = & -3 \\ x & + & y & + & z & + & 2w & = & 3 \end{cases}$$

(a) Resolva o sistema pela regra de Cramer.

(b) Resolva o sistema por eliminação de Gauss-Jordan

(c) Qual o método que envolve menos contas?

3) Resolva os seguintes sistemas homogêneos de equações lineares:

$$(a)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 3z & = & 0\\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 0\\ x & + & y & + & 4z & = & 0\end{array}\right.$$

$$(b)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0\\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 0\\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & & & x_5 & = & 0\\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & & & x_5 & = & 0\end{array}\right.$$

4) Discuta em função dos parâmetros os seguintes sistemas

$$(a)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & 3z & = & 10\\ 2x & + & 7y & - & 2z & = & 10\\ x & + & 5y & + & \alpha z & = & \beta\end{array}\right.$$

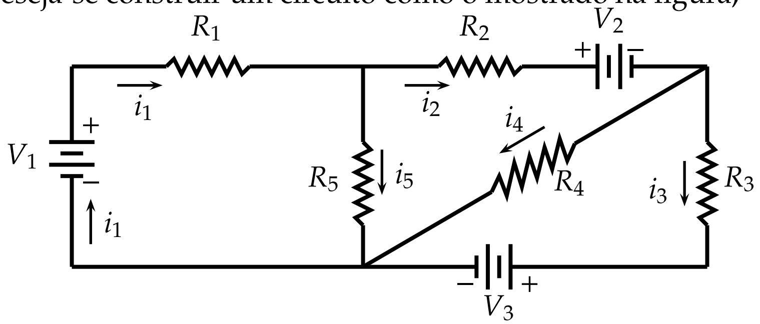
$$(b)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 2\\ & & 2y & + & & & 6t & = & 2\\ & & \alpha y & + & & & 3t & = & 1\\ & & 5y & + & z & - & t & = & 2\end{array}\right.$$

$$(c)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & -6\beta\\ \alpha x & + & 3y & + & 2z & = & 2\beta\\ 2x & + & y & + & (\alpha+1)z & = & 4\end{array}\right.$$

5) Dada $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & a^2-1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 5 & 3 & -1 & 2\\ a+2 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(a) Determine todos os valores de $a \in \mathbb{R}$ para que $\det A = 0$.
(b) Escolha um desses valores de a e, para este valor escolhido, dê exemplos de matrizes colunas B_1 e B_2 (4×1) tais que $AX = B_1$ tenha solução e $AX = B_2$ não tenha.

6) Deseja-se construir um circuito como o mostrado na figura,



onde $V_1 = 280\ V,\ V_2 = 100\ V,\ V_3 = 50\ V,\ R_1 = 20\ \Omega,\ R_2 = 30\ \Omega,$
$R_3 = 50\ \Omega, R_4 = 40\ \Omega,\ R_5 = 100\ \Omega.$
Dispõe-se de uma tabela de preços de vários tipos de resistências; assim como as correntes máximas que elas suportam sem queimar.

		resistências				
		$20\ \Omega$	$30\ \Omega$	$40\ \Omega$	$50\ \Omega$	$100\ \Omega$
correntes máximas	$0,5\ A$	$10,00$	$10,00$	$15,00$	$15,00$	$20,00$
	$1,0\ A$	$15,00$	$20,00$	$15,00$	$15,00$	$25,00$
	$3,0\ A$	$20,00$	$22,00$	$20,00$	$20,00$	$28,00$
	$5,0\ A$	$30,00$	$30,00$	$34,00$	$34,00$	$37,00$

De que tipo devemos escolher cada resistência para que o circuito funcione com segurança e a sua fabricação seja a de menor custo possível?

2.3 Apêndice

Após analisarmos o problema e obtermos o sistema de equações lineares através dos dados a ele correspondentes, podemos utilizar um Software computacional, por exemplo o MAPLE, para calcular as soluções dos sistemas. Vamos calcular com auxílio do MAPLE a solução dos sistemas dos exercícios 2.1.2 , 2.1.5 e 2.1.10:

Exercício 2.1.2

```
[> with(LinearAlgebra):
[> sys := [ x[1]+ x[2]+ x[3] =100,
3*x[1]+ 4*x[2]+ 8*x[3] =500,
7*x[1]+6*x[2]+ 2*x[3]= 500 ]:
var:= [x[1], x[2], x[3] ]:
[> (A, b) := GenerateMatrix( sys, var);
```

$$A, b : \;= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 100 \\ 500 \\ 500 \end{bmatrix}$$

```
[> A · Vector(var) = b;
```

$$\begin{bmatrix} x[1] + x[2] + x[3] \\ 3x[1] + 4x[2] + 8x[3] \\ 7x[1] + 6x[2] + 2x[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 500 \\ 500 \end{bmatrix}$$

```
[> GenerateMatrix( sys, var, augmented=true );
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 3 & 4 & 8 & 500 \\ 7 & 6 & 2 & 500 \end{bmatrix}$$

[> LinearSolve(%);

$$\begin{bmatrix} -100 + 4x[3] \\ 200 - 5x[3] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

Exercício 2.1.10

[> with(LinearAlgebra):

[> sys:=[70*x[1]+72*x[2]+80*x[3]+85*x[4] = 74000,
x[1]+ x[2]+ x[3] +x[4]=1000,
8*x[1]+8*x[2]+ 10*x[3]+3*x[4]= 8000,
22*x[1]+20*x[2]+10*x[3]+12*x[4] = 18000]:

[> var := [x[1],x[2], x[3], x[4]]:

[> (A, b) := GenerateMatrix(sys, var);

$$A, b := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 70 & 72 & 80 & 85 \\ 8 & 8 & 10 & 3 \\ 22 & 20 & 10 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1000 \\ 74000 \\ 8000 \\ 18000 \end{bmatrix}$$

[> A · Vector(var) = b;

$$\begin{bmatrix} x[1] + x[2] + x[3] + x[4] \\ 70x[1] + 72x[2] + 80x[3] + 85x[4] \\ 8x[1] + 8x[2] + 10x[3] + 3x[4] \\ 22x[1] + 20x[2] + 10x[3] + 12x[4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 74000 \\ 8000 \\ 18000 \end{bmatrix}$$

[> GenerateMatrix(sys, var, augmented=true);

$$\begin{bmatrix} 70 & 72 & 80 & 85 & 74000 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 8 & 8 & 10 & 3 & 8000 \\ 22 & 20 & 10 & 12 & 18000 \end{bmatrix}$$

[> LinearSolve(%);

$$\begin{bmatrix} -1000+\frac{33}{2}x[4] \\ 2000-20x[4] \\ \frac{5}{2}x[4] \\ x[4] \end{bmatrix}$$

Exercício 2.1.5

[> with(LinearAlgebra):

[> sys := $[\, a*x[1]+a*x[2]+c*x[3]=a\hat{\ }2+c\hat{\ }2,$
$b*x[1]-a*x[2]+c*x[3]=c\hat{\ }2-b\hat{\ }2,$
$a*x[1]+c*x[2]-b*x[3]=a\hat{\ }2-c\hat{\ }2\,]$:

[> var := [x[1], x[2], x[3]]:

[> (A, b) := GenerateMatrix(sys, var);

Error, recursive assignment

[> A · Vector(var) = b;

$$\begin{bmatrix} ax[1]+ax[2]+cx[3] \\ bx[1]-ax[2]+cx[3] \\ ax[1]+cx[2]-bx[3] \end{bmatrix} = b$$

[> GenerateMatrix(sys, var, augmented=true);

$$\begin{bmatrix} a & a & c & a^2+c^2 \\ b & -a & c & c^2-b^2 \\ a & c & -b & a^2-c^2 \end{bmatrix}$$

[> LinearSolve(%);

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-a^2c^2+2abc^2-c^2b^2+ba^3-2ac^3-ab^3+2a^3c}{-ac^2+bc^2+2a^2c+ba^2+ab^2} \\[2ex] \dfrac{cba^2+a^2b^2+ac^3+ab^3-abc^2+cab^2-bc^3+c^2b^2}{-ac^2+bc^2+2a^2c+ba^2+ab^2} \\[2ex] \dfrac{-a^2b^2-ac^3+cab^2+bc^3+cba^2-ba^3+3a^2c^2+abc^2}{-ac^2+bc^2+2a^2c+ba^2+ab^2} \end{bmatrix}$$

Capítulo 3

Espaços Vetoriais

Seja $\mathbb{K}$ um corpo.

Definição 3.0.1. *Um espaço vetorial é um conjunto V, não vazio, munido de duas operações:*

soma $+ : \begin{array}{c} V \times V \to V \\ (v, w) \longmapsto v + w \end{array}$ *e multiplicação por escalar* $\cdot : \begin{array}{c} \mathbb{K} \times V \to V \\ (k, v) \longmapsto k \cdot v \end{array}$

tais que para quaisquer u, v e $w \in V$ e $a, b \in \mathbb{K}$ as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$ *(propriedade associativa em relação à adição).*
2. $u + w = w + v$ *(propriedade comutativa).*
3. $\exists\ \mathbf{0} \in V$ *tal que* $u + \mathbf{0} = u$ *($\mathbf{0}$ é chamado vetor nulo).*
4. $\exists\ -u \in V$ *tal que* $u + (-u) = \mathbf{0}$.
5. $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$.
6. $(a + b) \cdot u = a \cdot u + a \cdot v$.
7. $(a \cdot b \cdot)v = a \cdot (b \cdot v)$ *(propriedade associativa).*
8. $1 \cdot u = u$.

Definição 3.0.2. *Seja V um espaço vetorial, $v \in V$ é chamado vetor do espaço vetorial V.*

Definição 3.0.3. *Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um subespaço vetorial de V se :*

1. *Para quaisquer $u,\ v \in W$ tivermos $u + v \in W$.*

2. *Para quaisquer $a \in \mathbb{K},\ u \in W$ tivermos $au \in W$.*

Observação 3.0.4. *Na definição de subespaço a condição $W \neq \emptyset$ pode ser substituída por $0 \in W$.*

Proposição 3.0.5. *Dado um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$, um subconjunto W, não vazio, será um subespaço vetorial de V se, e somente se, para quaisquer $u,\ v \in W$ e para quaisquer $a \in \mathbb{K}$ tivermos $u + av \in W$.*

Proposição 3.0.6. *Sejam W_1, W_2 subespaços de um espaço vetorial V.*
$W_1 + W_2 = \{w \in V \mid \exists\, w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2 \text{ tal que } w = w_1 + w_2\}$ é um subespaço vetorial de V.
$W_1 \cap W_2 = \{w \in V \mid w \in W_1 \text{ e } w \in W_2\}$ é um subespaço vetorial de V.

Definição 3.0.7. *Dado um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$, sejam $v_1, \cdots, v_n \in V$ e $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$, então, o vetor $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ é um elemento de V ao qual chamamos combinação linear de $v_1, \cdots, v_n$.*

O conjunto $W = \{v \in V \mid v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n\}$ é dito subespaço gerado por $v_1, \cdots, v_n$.
Notação: $W = [v_1, \cdots, v_n]$.

Definição 3.0.8. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, dado S subconjunto de V, não vazio, definimos o subespaço de V gerado por S,*
$[S] := \{k_1s_1 + k_2s_2 + \cdots k_ms_m \mid \forall m \in \mathbb{N}; k_i \in \mathbb{K} \text{ e } s_i \in S, i = 1, \cdots, m\}$.

Proposição 3.0.9. *Sejam W_1, W_2 subespaços de um espaço vetorial V.*
$W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$.

Definição 3.0.10. *V espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$. *Sejam* $v_1, \cdots, v_n \in$ $\in V$. *Dizemos que o conjunto* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *é linearmente independente (LI), ou que os vetores* $v_1, \cdots, v_n$ *são LI, se existirem* $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ *tais que a equação* $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = \mathbf{0}$ *é satisfeita então* $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

No caso em que exista algum $a_i \neq 0$, *dizemos que* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *é linearmente dependente (LD), ou que os vetores* $v_1, \cdots, v_n \in V$ *são LD.*

Teorema 3.0.11. $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *é LD se, e somente se, um destes vetores for combinação linear dos outros.*

Definição 3.0.12. *Um conjunto gerador e LI de um espaço vetorial V é chamado de base de V.*

Proposição 3.0.13. *Seja V espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$. *Se V é finitamente gerado então V possui uma base.*

Observação 3.0.14. *A proposição acima também é válida se V tem dimensão infinita (Ver Apêndice II).*

Lema 3.0.15. *Seja V espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$. *Se V é gerado por* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *e* $\{w_1, \cdots, w_m\}$ *é LI, então* $m \leq n$.

Corolário 3.0.16. *Todas as bases de um espaço finitamente gerado possuem o mesmo número de elementos.*

Definição 3.0.17. *Seja V espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *finitamente gerado. Definiremos como dimensão de V o número de elementos de uma base V.*

Observação 3.0.18. *No caso em que V não é finitamente gerado, já foi observado que V possui uma base, dizemos que V tem dimensão infinita.*

Lema 3.0.19. *Seja V espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *finitamente gerado. Se* $S = \{v_1, \cdots, v_m\} \subset V$ *é LI, então S pode ser completada para uma base de V.*

Proposição 3.0.20. *Seja V espaço vetorial sobre K de dimensão finita.* $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *é uma base para V se, e somente se,* $\forall v \in V$, *existem únicas escalares* $a_1, \cdots, a_n$ *tal que* $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_nv_n$, *ou seja, um subconjunto B de V é base de V se, e somente se, cada vetor de V se escreve de modo único como combinação linear de elementos de B.*

Definição 3.0.21. *Sejam* $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *e* $\beta' = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ *duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial* V. *Dado* $v \in V$, *podemos escrevê-lo como:*

$$(\chi) \quad \begin{array}{c} v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n \\ v = y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_nw_n \end{array}$$

Como β *e* β' *são bases para* V, *temos que:*
Se consideramos β *como base de V:* $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leftrightarrow v$.
A n-upla $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *é chamada as coordenadas de* $v \in V$ *na base* β *e denotada por:*

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Se consideramos β' *como base de V:* $(y_1, y_2, \cdots, y_n) \leftrightarrow v$.
A n-upla $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ *é chamada as coordenadas de* $v \in V$ *na base* β' *e denotada por:*

$$[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Proposição 3.0.22. *Sejam* $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *e* $\beta' = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ *duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial* V. *Então, para todo*

$v \in V$ *temos:*

$$[v]_\beta = [I]_\beta^{\beta'} \cdot [v]_{\beta'}.$$

onde $[I]_\beta^{\beta'} = [[w_1]_\beta \mid \cdots \mid [w_n]_\beta]_{n\times n}$.

Definição 3.0.23. $[I]_\beta^{\beta'}$ *é chamada de matriz mudança da base* β' *para a base* β.

Proposição 3.0.24. *Sejam* $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *e* $\beta' = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ *duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial* V. *Então,*
$[I]_\beta^{\beta'} = ([I]_{\beta'}^{\beta})^{-1}$.

Definição 3.0.25. V *espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$. *Sejam* $W, W_1,\ W_2$ *subespaços vetoriais de* V. *Dizemos que* W *é soma direta de* W_1 *e* W_2 *se* $W = W_1 + W_2$ *e* $W_1 \cap W_2 = 0$.

Notação: $W = W_1 \oplus W_2$.

Definição 3.0.26. V *espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$. *Sejam* $W_1,\ W_2$ *subespaços vetoriais de* V. *Considere* $W = W_1 + W_2$. *São equivalentes:*

1. $W = W_1 \oplus W_2$.
2. *Para todo* $w \in W$ *existem únicos* $w_1 \in W_1$ *e* $w_2 \in W_2$ *tais que* $w = w_1 + w_2$.

Proposição 3.0.27. V *espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita. Sejam* $U,\ W$ *subespaços vetoriais de* V. *Então:*
$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Definição 3.0.28. *Chama-se posto de uma matriz ao número máximo de linhas linearmente independentes que ela possui.*

Definição 3.0.29. $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *O espaço - coluna de* A *é o subespaço vetorial de* $\mathbb{K}^m$ *gerado pelos vetores colunas de* A.

O espaço - linha de A *é o subespaço vetorial de* $\mathbb{K}^n$ *gerado pelos vetores linha de* A.

Proposição 3.0.30. *Para toda* $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *tem-se:*

$\dim(\textit{espaço- coluna}) = \dim(\textit{espaço-linha}) = \textit{posto}(A)$.

Observação 3.0.31. *Seja* $A_{m\times n}$ *uma matriz. O número máximo de linhas linearmente independentes é igual ao número máximo de colunas linearmente independentes.*

Proposição 3.0.32. *Seja* $A_{m\times n}$ *uma matriz. O* $Posto(A) = Posto(A^t)$.

3.1 Exercícios Resolvidos

Exercício **3.1.1.**

Verificar que os seguintes subconjuntos $\mathbb{R}^3$ *não são subespaços vetoriais deste:*

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$.

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y + z = 0\}$.

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq y \leq z\}$.

(d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \in \mathbb{Q}\}$.

SOLUÇÃO

(a) O subconjunto $U_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$ de $\mathbb{R}^3$ não satisfaz nenhuma das duas condições para ser subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ pois:

(i) Observe que, por exemplo, $(1, 0, 0)$; $(1, 1, 0) \in U_0$, mas $(1, 0, 0) + (1, 1, 0) \notin U_0$.

(ii) Observe que, por exemplo, $(1, 0, 0) \in U_0$, mas $k(1, 0, 0) \notin U_0, \forall k \in \mathbb{R} - \{1\}$. Em particular, $(0, 0, 0) \notin U_0$. (Observemos que o fato do elemento neutro do espaço vetorial pertencer ao pretenso subconjunto é uma condição necessária).

(b) O subconjunto $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y + z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$ não satisfaz nenhuma das duas condições para ser subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ pois:

(i) Observe que, por exemplo, $(1, -1, 0)$; $(1, 0, -1) \in U_1$, mas $(1, -1, 0) + (1, 0, -1) \notin U_1$.

(ii) Observe que, por exemplo, $(2, -2, -2) \in U_1$, mas $k(2, -2, -2) \notin U_1, \forall k \in \mathbb{R}^*_-$.

(c) O subconjunto $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq y \leq z\}$ de $\mathbb{R}^3$ não satisfaz a segunda condição para ser subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ pois:

(i) para $\forall (x, y, z) \in (U_2 - \{(0, 0, 0)\})$, $\forall k \in \mathbb{R}^*_-$ temos que $k(x, y, z) \notin U_2$.

(d) O subconjunto $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \in \mathbb{Q}\}$ de $\mathbb{R}^3$ não satisfaz a segunda condição para ser um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ pois:

(i) para $\forall (x, y, z) \in (U_3 - \{(0, 0, 0)\})$, $\forall k \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ temos $k(x, y, z) \notin U_3$. (Observe que $\mathbb{Q}$ é um corpo.) ■

Exercício **3.1.2.**

Seja $I = [0, 1]$. *Verificar se são subespaços vetoriais de*

$$C(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \ \textit{tal que} \ f \textit{ é contínua em } I\} :$$

(a) $\{f \in C(I) \mid f(0) = 0\}$.

(b) $\{f \in C(I) \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$.

(c) $\{f \in C(I) \mid f(0) = f(1)\}$.

(d) $\{f \in C(I) \mid f(t) = 0$ *em todos os pontos de I exceto, possivelmente, num número finito deles*$\}$.

SOLUÇÃO

Vamos verificar se valem, para cada um dos subconjuntos dados, os pré-requisitos para subespaço vetorial.

(a) Sejam h e $g \in S_0 = \{f \in C(I) \mid f(0) = 0\}$ e $k \in \mathbb{R}$.

(i) $(h + g)(0) = h(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, portanto $(h + g)(x) \in S_0$.

(ii) $(kg)(0) = kg(0) = k \cdot 0 = 0, \forall k \in \mathbb{R}$, portanto $(kg)(x) \in S_0$.

Logo, podemos dizer que S_0 é um subespaço vetorial de $C(I)$.

(b) Sejam h e $g \in S_1 = \{f \in C(I) \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ e $k \in \mathbb{R}$.

(i) $\int_0^1 (h+g)(t)dt = \int_0^1 h(t)dt + \int_0^1 g(t)dt = 0 + 0 = 0$ portanto, $(h+g)(x) \in S_1$.

(ii) $\int_0^1 (kg)(t)dt = k\int_0^1 g(t)dt = k \cdot 0 = 0\ ; \forall k \in \mathbb{R}$ portanto, $(kg)(x) \in S_1$.

Logo, podemos dizer que S_1 é um subespaço vetorial de $C(I)$.

(c) Sejam h e $g \in S_2 = \{f \in C(I) \mid f(0) = f(1)\}$ e $k \in \mathbb{R}$.

(i) $(h+g)(0) = h(0) + g(0) = h(1) + g(1) = (h+g)(1)$, portanto $(h+g)(x) \in S_2$.

(ii) $(kg)(0) = kg(0) = kg(1) = (kg)(1), \forall k \in \mathbb{R}$, portanto $(kg)(x) \in S_2$.

Logo, podemos dizer que S_2 é um subespaço vetorial de $C(I)$.

(d) Observe que: $S_3 = \{0\}$, pois se existisse $x \in I$ tal que $f(x) \neq 0$, onde $f \in C[0,1]$, então existiria uma vizinhança de x tal que f não se anula nesta vizinhança. (Ver Cálculo Diferencial e Integral I/ Análise Real I). Daí, podemos dizer que S_3 é um subespaço vetorial de $C(I)$. ■

Exercício **3.1.3.** *Seja V um espaço vetorial. Se $(U_j)_j$ é uma família de subespaços vetoriais de V, mostrar que $\cap_j U_j$ também é um subespaço vetorial de V. O que poderíamos dizer sobre a união de subespaços vetoriais de um dado espaço vetorial?*

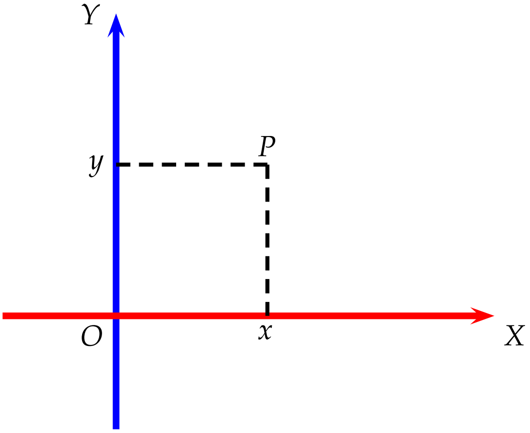
DEMONSTRAÇÃO

Sejam $v, w \in \cap_j U_j$ e $k \in K$ corpo de escalares. Observe que v, $kw \in U_j\, \forall j$. Daí $v + kw$ e $0 \in U_j\ \forall j$, já que para cada j, U_j é subespaço de V.

Portanto, $v + kw$ e $0 \in \cap_j U_j$. Logo, podemos afirmar que $\cap_j U_j$ é um subespaço vetorial de V, onde $(U_j)_j$ é uma família de subespaços vetoriais de V. ■

A união de subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial **não é necessariamente um subespaço vetorial**. Vejamos o exemplo a seguir:

Consideremos $V = \mathbb{R}^2$ (plano cartesiano). Observemos que $\overrightarrow{OX} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $\overrightarrow{OY} = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$ são subespaços vetoriais de $V = \mathbb{R}^2$, mas a união destes não é um subespaço vetorial, pois $(x, 0) + (0, y) = (x, y) \notin (\overrightarrow{OX} \cup \overrightarrow{OY})$, onde $x \neq 0; y \neq 0$. ■



Exercício 3.1.4.

Mostrar que a união de subespaços vetoriais do mesmo espaço vetorial é também um subespaço vetorial se, e somente se, um dos subespaços está contido no outro.

DEMONSTRAÇÃO

Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V.

Se $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$ é imediato que a união $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V. Restando, apenas, mostrar que:

Se $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V, onde W e U são subespaços de V, então $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$.
De fato, suponhamos que $\exists x \in (U - W)$ e $\exists y \in (W - U)$. Observemos que se $U \cup W$ fosse um subespaço, $x + y \in U \cup W$, portanto $x + y \in U$ ou $x + y \in W$, teríamos $x \in W$, pois $y \in W$ e W é subespaço vetorial, ou $y \in U$, pois $x \in U$ e U é subespaço vetorial. O que é um absurdo, logo deveremos ter $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$. ■

Exercício **3.1.5.** *Sejam* $W_1 = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0 \, e \, z - t = 0\}$ *e* $W_2 = \{(x, y, z, t) \mid x - y - z + t = 0\}$ *subespaços vetoriais de* $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine $W_1 \cap W_2$.

(b) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.

(c) Determine $W_1 + W_2$.

(d) $W_1 + W_2$ *é soma direta? Justifique.*

(e) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$*? Justifique.*

SOLUÇÃO

(a)

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0, \; z - t = 0, \; x - y - z + t = 0\} \\ &= [(0, 0, 1, 1)] \end{aligned}$$

(b) Como $W_1 \cap W_2$ é gerado por um único vetor, não nulo, segue que $\{(0, 0, 1, 1)\}$ é uma base para $W_1 \cap W_2$.

(c)

$$W_1 = [(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)],$$

$$W_2 = [(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, -1)].$$

Portanto, $W_1 + W_2 = [(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(1,1,0,0),(1,0,1,0),$ $(1,0,0,-1)] = [(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(1,1,0,0),(1,0,1,0)]$.

(d)Não, pois $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

(e) Sabemos que

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

temos $\dim(W_1 + W_2) = 2 + 3 - 1 = 4$. Logo $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$. ■

Exercício **3.1.6.** *No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes subespaços:*

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} \\ V &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0\} \\ W &= [(1,1,0),(0,0,2)] \end{aligned}$$

Determinar uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços: U, V, W, $U \cap V$, $V + W$ e $U + V + W$.

SOLUÇÃO

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$, observemos que $(0,y,z) = y(0,1,0) + z(0,0,1)$ onde $(0,1,0),(0,0,1) \in U$. Portanto, $U = [(0,1,0),(0,0,1)]$, onde $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base. Daí, podemos concluir que $\dim U = 2$.

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0\} = \{(x,2z,z) \in \mathbb{R}^3\}$, observemos que $(x,2z,z) = x(1,0,0) + z(0,2,1)$ onde $(1,0,0),(0,2,1) \in V$. Portanto, $V = [(1,0,0),(0,2,1)]$, onde $\{(1,0,0),(0,2,1)\}$ é uma base para V. Daí, podemos concluir que $\dim V = 2$.

Como $W = [(1,1,0),(0,0,2)]$ e $\{(1,1,0),(0,0,2)\}$ é L.I segue que $\dim W = 2$.

$U \cap V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ e } y - 2z = 0\} = \{(0, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} =$
$= [(0, 2, 1)]$. Portanto, $\dim(U \cap V) = 1$.

$V + W = [(1, 0, 0), (0, 2, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 2)]$. Como $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 2)\}$ é L.I e $\dim(V + W) \leq 3$, segue que $\dim(V + W) = 3$ e $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 2)\}$ é uma base para $V + W$.

$U + V + W = [(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$. Como $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é L.I e $\dim(V + W + U) \leq 3$ segue que $\dim(V + W + U) = 3$ e $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base para $(V + W + U)$. ■

Exercício 3.1.7. *Considere o sistema linear*

$$(\S)\begin{cases} 2x + 4y - 6z = a \\ x - y + 4z = b \\ 6y - 14z = c \end{cases}$$

Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z)$ *é solução de* $(\S)\}$. *Isto é, W é o conjunto solução do sistema.*

(a) Que condições devemos impor a a, b e c para que W seja um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$*?*

(b) Nas condições determinadas no item a) encontre uma base para W.

(c) Que relação existe entre a dimensão de W e o grau de liberdade do sistema?

SOLUÇÃO

(a) Observemos que o vetor nulo pertencer a W é condição necessária para W ser subespaço vetorial. Portanto, (0, 0, 0) deverá ser uma solução, ou seja, $a = b = c = 0$.

(b)

$$\begin{cases} 2x+4y-6z=0 \\ x-y+4z=0 \\ 6y-14z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x+4y-6z=0 \\ +6y-14z=0 \\ +6y-14z=0 \end{cases}$$

O sistema acima é possível e indeterminado com grau de liberdade igual a 1. $(x,y,z) \in W \Leftrightarrow y = \frac{7z}{3}$ e $x = \frac{-5z}{3}$. Portanto, $w = [(\frac{-5}{3}, \frac{7}{3}, 1)]$.

(c) O grau de liberdade do sistema é a dimensão de W. ■

Exercício 3.1.8. *Mostrar que os polinômios* $(1-t), (1-t)^2, (1-t)^3$ *e* 1 *geram* $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

SOLUÇÃO

Como $\dim \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = 4$,

$1-t, (1-t)^2, (1-t)^3$ e 1 geram $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \{1-t, (1-t)^2, (1-t)^3, 1\}$ é LI.

Basta, portanto, mostrar que: $\{1-t, (1-t)^2, (1-t)^3, 1\}$ é LI.
Suponhamos que existam constantes reais k_0, k_1, k_2, k_3 tais que

$$\sum_{i=0}^{3} k_i(1-t)^i = 0.$$

Devemos mostrar que $k_i = 0 \; \forall i = 0, \cdots, 3$. De fato,

$$\left(\sum_{i=0}^{3} k_i(1-t)^i\right)^{(j)} = 0, \forall j = 0, \cdots, 3 \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}.$$

Para cada j, $j = 0, \cdots, 3$ fazendo $t = 1$ em $\left(\sum_{i=0}^{3} k_i(1-t)^i\right)^{(j)} = 0$ temos $k_j = 0$. ■

Mais geralmente: O conjunto

$$\{1,\ (x-a), (x-a)^2, \cdots,\ (x-a)^{n-1}, (x-a)^n\}$$

de vetores de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, onde $a \in \mathbb{R}$ é LI (pode ser resolvido com raciocínio análogo ao aplicado no caso anterior para $n = 3$, ou seja, considerar as (n + 1)equações da forma

$$\left(\sum_{i=0}^{n} k_i(x-a)^i\right)^{(j)} = 0.$$

onde $j = 0, \cdots, n$ e fazer $x = a$ em cada uma das (n + 1)equações.

Outra maneira: Suponhamos que existam $k_i, i = 0, \cdots, n$ reais tais que

$$\sum_{i=0}^{n} k_i(x-a)^i = 0. \qquad (1)$$

Como a relação (1) é válida $\forall x \in \mathbb{R}$, consideremos $t_0, t_1, \cdots, t_n$ distintos entre si e diferentes de a. Temos o seguinte sistema homogêneo de $(n+1)$ equações:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} k_i(t_0-a)^i = 0. \\ \sum_{i=0}^{n} k_i(t_1-a)^i = 0. \\ \sum_{i=0}^{n} k_i(t_2-a)^i = 0. \\ \qquad \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} k_i(t_n-a)^i = 0. \end{cases}$$

Escrevendo o sistema sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & (t_0-a) & (t_0-a)^2 & \cdots & (t_0-a)^n \\ 1 & (t_1-a)^n & (t_1-a)^n & \cdots & (t_1-a)^n \\ 1 & (t_2-a)^n & (t_2-a)^n & \cdots & (t_2-a)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (t_n-a)^n & (t_n-a)^n & \cdots & (t_n-a)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observemos que o sistema acima é possível e determinado, visto que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema é não-nulo (Ver Apêndice - Matrizes: Matriz de Vandermond). Portanto, podemos concluir que $k_i = 0,\ i = 0, \cdots, n$. Logo, $\{1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}, (x-a)^n\}$ de vetores de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, onde $a \in \mathbb{R}$ é LI. ■

Exercício **3.1.9.** *Mostrar que os dois conjuntos abaixo formados de funções contínuas reais definidas em $\mathbb{R}$ geram o mesmo subespaço vetorial de $C(\mathbb{R})$:*

$$\{sen^2(t),\ cos^2(t),\ sen(t)\cdot cos(t)\}\ e\ \{1,\ sen(2t),\ cos(2t)\}$$

SOLUÇÃO

Usando as relações trigonométricas:

$$\begin{cases} sen(2t) = 2sen(t)cos(t) \\ cos(2t) = cos^2(t) - sen^2(t) \\ cos^2(t) + sen^2(t) = 1 \end{cases}$$

temos que: $[1,\ sen(2t),\ cos(2t)] \subseteq [sen^2(t),\ cos^2(t),\ sen(t)\cdot cos(t)]$.

Usando as relações trigonométricas:

$$\begin{cases} cos^2(t) = \dfrac{1 + cos(t)}{2}, \\ sen^2(t) = \dfrac{1 - cos(t)}{2}, \\ sen(2t) = 2sen(t)cos(t) \end{cases}$$

temos que: $[sen^2(t),\ cos^2(t),\ sen(t) \cdot cos(t)] \subseteq [1,\ sen(2t),\ cos(2t)]$.

Logo, $[1,\ sen(2t),\ cos(2t)] = [sen^2(t),\ cos^2(t),\ sen(t) \cdot cos(t)]$. ■

Exercício **3.1.10.** *Provar que o conjunto de funções* $\{e^{at}cos(bt),\ e^{at}sen(bt)\}$*, onde a e b são números reais e* $b \neq 0$*, é LI*

SOLUÇÃO

Suponhamos que existam constantes reais k_1 e k_2 tais que: $k_1e^{at}cos(bt) + k_2e^{at}sen(bt) = 0$. Devemos mostrar que $k_1 = k_2 = 0$. De fato, observemos que: $k_1e^{at}cos(bt) + k_2e^{at}sen(bt) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ em particular para $t = 0$, portanto, temos $k_1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 = 0$, ou seja, $k_1 = 0$. E como, $k_2e^{at}sen(bt) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$, em particular para $t = \pi$ segue que $k_2 \cdot e^{a\pi} \cdot -1 = 0$, ou seja, $k_2 = 0$. ■

Exercício **3.1.11.** *Mostrar que os números* $2 + 3i$ *e* $1 - 2i$ *geram o espaço vetorial* $\mathbb{C}$ *sobre* $\mathbb{R}$.

SOLUÇÃO

Devemos mostrar que $\forall z \in \mathbb{C}$, z pode ser escrito como combinação linear $2+3i$ e $1-2i$. De fato, seja $z = x+iy$ onde $x, y \in \mathbb{R}$. Observemos que

$$\begin{aligned} x + iy = a(1-2i) + b(2+3i) \quad &\Leftrightarrow \quad x = 2a + b, y = 3a - 2b \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Como a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ é inversível temos que o sistema acima é possível e determinado. Portanto, podemos concluir que $2+3i$ e $1-2i$ geram $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$, ou seja, $\{2+3i, 1-2i\}$ formam uma base para o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$. ■

Exercício **3.1.12.** *Considere o seguinte subespaço vetorial de* $\mathbb{C}^3$*:*

$$W = [(1,\ 0,\ i), (1,\ 1+i,\ 1-i), (1,\ -1-i,\ -1+3i)].$$

Determinar uma base deste subespaço.

SOLUÇÃO

Observemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 1 & 1+i & 1-i \\ 1 & -1-i & -1+3i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1+i & 1-2i \\ 0 & -1-i & -1+2i \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1+i & 1-2i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$\dim(W) = 2$ e $\{(1,\ 0,\ i), (1,\ 1+i,\ 1-i)\}$, $\{(1,\ -1-i,\ -1+3i), (1,\ 0,\ i)\}$, $\{(1,\ 1+i,\ 1-i), (1,\ -1-i,\ -1+3i)\}$ são bases para W. ■

Exercício **3.1.13.** *Considere as bases* $B = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ *e* $C = \{g_1, g_2, g_3\}$ *do* $\mathbb{R}^3$ *assim relacionadas:*

$$\begin{aligned} g_1 &= e_1 - e_2 - e_3 \\ g_2 &= \quad + 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 &= 3e_1 \quad + e_3 \end{aligned}$$

(a) Determinar as matrizes de mudanças de B para C e de C para B.

(b) Se um vetor u de $\mathbb{R}^3$ apresenta coordenadas 1, 2 e 3, em relação a B, quais as coordenadas de u relativamente a C?

SOLUÇÃO

(a)

$$[I]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} g_1 = e_1 - e_2 - e_3 \\ g_2 = 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 = 3e_1 + e_3 \end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{L_3 - 3L_1 \to L_3} \begin{cases} g_1 = e_1 - e_2 - e_3 \\ g_2 = 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 - 3g_1 = 3e_2 + 4e_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1 = e_1 - e_2 - e_3 \\ g_2 = 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 - 3g_1 = 3e_2 + 4e_3 \end{cases} \quad \underset{\Leftrightarrow}{-2L_3 + 3L_2 \to L_3}$$

$$\underset{\Leftrightarrow}{-2L_3 + 3L_2 \to L_3} \begin{cases} g_1 = e_1 - e_2 - e_3 \\ g_2 = 2e_2 + 3e_3 \\ -2g_3 + 6g_1 + 3g_2 = e_3 \end{cases} \quad \underset{\Leftrightarrow}{\tfrac{1}{2}L_2 - \tfrac{3}{2}L_3 \to L_2}$$

$$\underset{\Leftrightarrow}{\tfrac{1}{2}L_2 - \tfrac{3}{2}L_3 \to L_2} \begin{cases} g_1 = e_1 - e_2 - e_3 \\ e_2 = -9g_1 - 4g_2 + 3g_3 \\ e_3 = 6g_1 + 3g_2 - 2g_3 \end{cases} \quad \underset{\Leftrightarrow}{-L_2 - L_3 + L_1 \to L_1}$$

$$\underset{\Leftrightarrow}{-L_2 - L_3 + L_1 \to L_1} \begin{cases} e_1 = -2g_1 - g_2 + g_3 \\ e_2 = -9g_1 - 4g_2 + 3g_3 \\ e_3 = 6g_1 + 3g_2 - 2g_3 \end{cases}$$

Portanto, $[I]_C^B = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$

Observemos que:

$$[I]_B^C = ([I]_C^B)^{-1}$$

(b)

$$[u]_C = [I]_C^B \cdot [u]_B = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Exercício **3.1.14.** *Mostrar que é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$ o subconjunto formado pelas matrizes anti-simétricas. Mostrar que $M_n(\mathbb{R})$ é soma direta dos subespaços das matrizes simétricas e das anti-simétricas.*

DEMONSTRAÇÃO

Considere $S_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$ o conjunto das matrizes simétricas e $AT_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$ o conjunto das matrizes anti-simétricas.

Afirmação 1: $S_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

De fato, $0 \in S_n(\mathbb{R})$. Sejam $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$. Temos que $(A+kB)^t = = A^t+kB^t = A+kB$, portanto, $A+kB \in S_n(\mathbb{R})$. Podemos então concluir que $S_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

Afirmação 2: $AT_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

De fato, $0 \in AT_n(\mathbb{R})$. Sejam $A, B \in AT_n(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$, temos que $(A + kB)^t = A^t + kB^t = -A - kB = -(A + kB)$. Podemos então concluir que $AT_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

Afirmação 3: $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \bigoplus AT_n(\mathbb{R})$.

De fato, seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = \dfrac{A + A^t}{2} + \dfrac{A - A^t}{2}$, onde $\dfrac{A + A^t}{2} \in S_n(\mathbb{R})$ e $\dfrac{A - A^t}{2} \in AT_n(\mathbb{R})$, podemos, portanto, concluir que $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + AT_n(\mathbb{R})$.

Observemos, ainda, que se $A \in S_n(\mathbb{R}) \cap AT_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = \mathbf{0}$ (matriz identicamente nula), pois pela definição teríamos que
$A = A^t = -A$.

Logo, $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \bigoplus AT_n(\mathbb{R})$. ■

Exercício **3.1.15.** *Mostrar que as matrizes:*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \; e \; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

formam uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

SOLUÇÃO

Como $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, basta mostrarmos que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\} \text{ é LI}$$

Considere β a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Analogamente, podemos concluir que:

$$\left[\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Observemos que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Daí a matriz A é invertível e, portanto, os vetores cujas coordenadas representam as linhas desta matriz são LI ■

Exercício **3.1.16.** *Determinar a dimensão dos seguintes subespaços de* $M_n(\mathbb{R})$*:*

(a) subespaço das matrizes simétricas;

(b) subespaço das matrizes anti-simétricas;

(c) subespaço das matrizes A tais que $A = 2A^t$;

(d) subespaço das matrizes $A = (a_{ij})$ tais que $\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}) = 0$.

SOLUÇÃO

(a) Considere $S_n(\mathbb{R}) = \{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = a_{ji}\}$.

$$A = [a_{ij}] \in S_n(\mathbb{R}),\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} D_i + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{1n} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+a_{23}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{2n}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots +$$

$$+a_{n(n-1)}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

onde D_{ii} é a matriz diagonal de ordem n, cuja entrada ii é igual a 0, e as demais entradas (da diagonal) são nulas.

Daí, $\dim S_n(\mathbb{R}) = n + (n-1) + \cdots + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(b) Considere $AT_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$ o conjunto das matrizes anti-simétricas.

$$A = [a_{ij}] \in AT_n(\mathbb{R}),\ A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{1n}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+a_{23}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{2n}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots +$$

$$+a_{n(n-1)}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \bigoplus AT_n(\mathbb{R})$, temos que
$\dim AT_n(\mathbb{R}) = \dim M_n(\mathbb{R}) - \dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

(c) Subespaço das matrizes A tais que $A = 2A^t$ é o subespaço nulo, pois $a_{ij} = 2a_{ji}$ e $a_{ji} = 2a_{ij}$ e, portanto, tem dimensão zero.

(d) Considere $N = \{A = [a_{ij}]$ tais que $\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}) = 0\}$.

$$\text{Seja } A \in N, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \sum_{i=1}^{(n-1)}(-a_{ii}) \end{bmatrix}$$

$$A = a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} + \cdots +$$

$$+a_{(n-1)(n-1)}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\cdots + a_{1n}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{(n-1)n}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

$\dim N = n^2 - 1$ ■

Exercício **3.1.17.** *Considere o seguinte subespaço vetorial de* $M_2(\mathbb{R})$*:*

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x - y - z = 0 \right\}.$$

(a) Mostrar que os seguintes subconjuntos de $M_2(\mathbb{R})$ *são bases de* U*:*

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \; e$$

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) Achar a matriz mudança de base de B *para* C *e de* C *para* B*.*

(c) Achar uma base D *de* U*, de maneira que a matriz de mudança de* D *para* B *seja:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO

(a) Seja $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in U$ como $x - y - z = 0$, segue que

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+z & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} =$$
$$= y\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, B gera U.

Afirmamos que B é LI.

De fato, suponha que existam $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que

$$a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $a = b = c = 0$. Portanto B é LI.
Como B gera U e é um conjunto LI de vetores, segue que B é uma base para o subespaço vetorial U e portanto $\dim U = 3$.

Como $\dim U = 3$ então para mostrar que o conjunto C é também uma base para o espaço U, basta mostrar que C é LI.
De fato, suponhamos que existam escalares reais k_1, k_2, k_3 tais que

$$k_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ k_2 + k_1 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Daí $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

(b) Observemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Por raciocínio análogo, podemos afirmar que:

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $[I]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Observemos que:

$[I]_B^C = ([I]_C^B)^{-1}$.

(c) Considere $D = \{v_1, v_2, v_3\}$.Como temos a matriz mudança da base D para a base B, sabemos que $[v_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e, portanto,

$v_1 = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Analogamente, $[v_2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $[v_3]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Portanto,$v_2 = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja,

$v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e

$v_3 = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja,

$v_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$D = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é a base desejada. ■

3.2 Exercícios Propostos

1) Determine quais dos conjuntos abaixo são subespaços de $\mathbb{R}^n$ (com $n \geq 3$) sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais. Justifique sua resposta.

(a) $W_1 = \{(u_1,\ u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_1 \geq 0\}$.

(b) $W_2 = \{(u_1,\ u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_1 + 3 \cdot u_2 = u_3\}$.

(c) $W_3 = \{(u_1,\ u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_2 = u_1^2\}$.

(d) $W_4 = \{(u_1,\ u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_1 \cdot u_2 = 0\}$.

(e) $W_5 = \{(u_1,\ u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_2 \text{ é irracional}\}$.

2) Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais. Determine quais dos conjuntos abaixo são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Justifique sua resposta.

(a) $W_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(t^2) = (f(t))^2 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$.

(b) $W_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 2\}$.

(c) $W_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(3) = 1 + f(-5)\}$.

(d) $W_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(-1) = 0\}$.

(e) $W_5 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ é contínua}\}$.

3) Seja $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que F é um subespaço vetorial e indique uma base de F e a respectiva dimensão.

(b) Sendo $G = \Big[(1, -1, 0),\ (-1, 1, 1)\Big]$, determine as equações cartesianas do subespaço G e indique um conjunto de geradores de G que não seja base. Qual a dimensão de G? Justifique.

(c) Caracterize $F + G$ e indique a respectiva dimensão. Será $F + G$ uma soma direta? Justifique.

4) Considere os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$,

$$F = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0;\ x + 2y = w\right\}$$
$$G = \left[(1,-1,1,0),\ (1,1,-2,1)\right].$$

(a) Calcule uma base e a dimensão de F.

(b) Caracterize G por meio de um sistema de equações cartesianas.

(c) Determine uma base para o subespaço $H = F + G$ e indique a respectiva dimensão. H é uma soma direta? Justifique.

5. Seja $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0\}$, $u = (1,1,1,0)$, $v = (0,2,2,1)$ e $w = (2,0,0,3)$.

a) Mostre que $\{u,v,w\}$ gera V.

b) Ache as coordenadas do vetor $(5,5,5,4)$ em relação à base $A = \{u,v,w\}$.

c) Encontre um conjunto de geradores de V que seja LD.

6. Estenda o conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ a uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

7. Prove que a união de três subespaços vetoriais só pode ser um subespaço vetorial quando um deles contém os outros dois.

8. Para todo subespaço vetorial $F \subseteq \mathbb{R}^n$, prove que existe um subespaço G tal que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

9. Seja F um subespaço vetorial de E. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

a) se $u \notin F$ e $v \notin F$, então $u + v \notin F$;

b) se $u \notin F$ e $\alpha \neq 0$, então $\alpha \cdot u \notin F$.

10. Prove que todo espaço vetorial de dimensão finita é soma direta de subespaços de dimensão 1.

11. Dado o conjunto finito $\mathbb{X} = \{a_1, \cdots, \alpha_n\}$, obtenha uma base para o espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$.

Dica: Considere para cada $i = 1, \cdots, n$ a função $f_i : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ tal que $f(a_i) = 1$ e $f(x) = 0$, se $x \neq a$.

12. Seja $\mathbb{X}$ um conjunto infinito. Para cada $a \in \mathbb{X}$, seja $f_a : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ a função tal que $f_a(a) = 1$ e $f_a(x) = 0$, se$x \neq a$. Prove que o conjunto $\mathbb{Y} \subset \mathcal{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ formado por estas funções é linearmente independente, logo $\mathcal{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ tem dimensão infinita. Prove ainda que $\mathbb{Y}$ não gera $\mathcal{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$.

Dica: Para provar que $\mathbb{Y}$ não gera $\mathcal{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$, mostre que as funções constantes, não nulas, não pertencem a $\mathbb{Y}$.

3.3 Apêndice I

1. Sejam $A \in M_{m\times r}(\mathbb{K})$, $B \in M_{r\times n}(\mathbb{K})$ e $C = AB \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Afirmação 1. *Se $A \in M_{m\times r}(\mathbb{K})$, $B \in M_{r\times n}(\mathbb{K})$ e $C = AB \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ então $Posto(A) \geq Posto(C)$.*

Dem: Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times r}$, $B = [b_{ij}]_{r\times n}$ e $C = [c_{ij}]_{m\times n}$. Considere $Posto(A) = s$ e $l_j = (a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jr}), \cdots, l_{j+s} = (a_{(j+s)1}, a_{(j+s)2}, \cdots, a_{(j+s)r})$ linhas de A portanto existem $t_j, \cdots, t_{(j+s)}$ constantes não todas nulas tais que:

$$\begin{aligned} t_j l_j + t_{j+1} l_{j+1} + \cdots + t_{j+s} l_{j+s} &= \left(\sum_{i=j}^{j+s} t_i a_{i1}, \sum_{i=j}^{j+s} t_i a_{i2}, \ldots, \sum_{i=j}^{j+s} t_i a_{ir} \right) = \\ &= (0, 0, \cdots, 0). \end{aligned}$$

Considere $\widetilde{l_j} = (c_{j1}, c_{j2}, \cdots, c_{jn}), \cdots, \widetilde{l_{j+s}} = (c_{(j+s)1}, c_{(j+s)2}, \cdots, c_{(j+s)n})$ linhas de C. Como $C = AB$ temos: $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$.

Portanto,

$$\widetilde{l_j} = \left(\sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{k1}, \cdots, \sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{kn} \right), \widetilde{l_{(j+1)}} = \left(\sum_{k=1}^{r} a_{(j+1)k} b_{k1}, \cdots, \sum_{k=1}^{r} a_{(j+1)k} b_{kn} \right),$$

$$\cdots, \widetilde{l_{(j+s)}} = \left(\sum_{k=1}^{r} a_{(j+s)k} b_{k1}, \cdots, \sum_{k=1}^{r} a_{(j+s)k} b_{kn} \right).$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} t_j \widetilde{l_j} + t_{j+1} \widetilde{l_{j+1}} + \cdots + t_{j+s} \widetilde{l_{j+s}} &= \left(\sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{q=j}^{j+s} t_q a_{qk} \Big) b_{k1}, \cdots, \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{q=j}^{j+s} t_q a_{qk} \Big) b_{kn} \right) = \\ &= (0, 0, \cdots, 0). \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que $s = Posto(A) \geq Posto(C)$.

Afirmação 2. *Se $A \in M_{m\times r}(\mathbb{K})$, $B \in M_{r\times n}(\mathbb{K})$ e $C = AB \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ então $Posto(B) \geq Posto(C)$.*

Dem: Como $C = AB \Leftrightarrow C^t = (AB)^t = B^tA^t$ segue pela afirmação acima que $posto(C) = Posto(C^t) \leq Posto(B^t) = Posto(B)$.

Generalização de soma direta de subespaços de um mesmo espaço vetorial

Definição 3.3.1. *Seja V espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.*
Considere $W_1, W_2, \cdots, W_k$ subespaços de V.
Seja $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_k = \{w \in | \ w = w_1 + \cdots + w_k; \ w_i \in W_i\}$.
Dizemos que $W_1, W_2, \cdots, W_k$ são independentes se

$$w_1 + \cdots + w_k = 0 \Leftrightarrow w_i = 0 \ \forall i = 1, \cdots, k.$$

Obs: Independência de subespaços é a generalização de independência linear de vetores.

Proposição 3.3.2. *Suponha que $W_1, W_2, \cdots, W_k$ subespaços de V.*
Considere $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$.

São equivalentes:

1. *$\{W_i\}_{i=1}^k$ é independente.*
2. *Cada vetor $w \in W$ pode ser escrito na forma $w = w_1 + w_2 + \cdots + w_k$ de maneira única.*
3. *$W_i \cap (\sum_{j\neq i}^k W_j) = 0; \ i = 1, \cdots, k$.*

   Dem: Ver **HOFFMAN**, *Kenneth &* **KUNZE**, *Ray. Álgebra Linear. Editora Polígono: São Paulo. 1971.*

Definição 3.3.3. *Quando as condições acima são satisfeitas, dizemos que W é soma direta de $W_1, W_2, \cdots, W_k$ e escrevemos*
$W = \bigoplus_{i=1}^k W_i = W_1 \bigoplus W_2 \bigoplus \cdots \bigoplus W_k$.

Lema 3.3.4. *V espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e $W_1, W_2, \cdots, W_k$ subespaços de V. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$.

2. *Se β_i é base de W_i para $i = 1, \cdots, k$ então $\beta = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$ é base para V.*

Dem: Ver **HOFFMAN**, *Kenneth &* **KUNZE**, *Ray. Álgebra Linear. Editora Polígono: São Paulo. 1971.*

3.4 Apêndice II

Exemplos de espaços vetoriais de dimensão infinita

1. $\mathbb{R}^{\infty} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

2. $\mathbb{P}(K) := \bigcup_0^{\infty} \mathbb{P}_n(K)$.

3. $C^{\infty}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \in C^n(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_0^{\infty} C^n(\mathbb{R})$.

LEITURA COMPLEMENTAR: Os assuntos tratados abaixo, geralmente, são abordados em cursos de matemática mais avançados. O intuito de colocá-los aqui é para que sirva, pelo menos, de orientação para os que desejam complementar a leitura aprofundando seus estudos.

Teorema 3.4.1. *Seja V um espaço vetorial, não nulo, sobre o corpo K. Então existe uma base para V.*

Para demonstrarmos o teorema acima, utilizaremos um lema muito especial da Teoria dos Conjuntos, o **LEMA DE ZORN**.

Noções Básicas

Seja S um conjunto. Uma *ordem parcial* (também chamada uma ordem) em S é uma relação, escrita $x \leq y$, entre alguns pares de elementos de S, dotada das seguintes propriedades:

1. $x \leq x$.

2. Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

3. Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.

OBS: Alguns pares de elementos de S podem não ser comparáveis.

Exemplo **3.4.1.** *: Sejam X um conjunto e S o conjunto dos subconjuntos de X. Se Y , Z são subconjuntos de X, definimos $Y \leq Z$ se Y é um subconjunto de Z. Isso define uma ordem parcial em S. Esta ordem parcial é a inclusão, ou seja, $Y \leq Z \Leftrightarrow Y \subseteq Z$.*

Definição 3.4.2. *Seja S um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que a, $a \in S$ é menor elemento de S se $a \leq x, \forall x \in S$. E dizemos que $b \in S$ é maior elemento , se $x \leq b, \forall x \in S$. Observe que se existem um menor ou maior elemento de um conjunto S parcialmente ordenado, estes serão únicos.*

Definição 3.4.3. *Um elemento m de S é dito maximal se $x \in S$ e $x \geq m$, então $x = m$.*

Definição 3.4.4. *Sejam S um conjunto parcialmente ordenado e T um subconjunto. Um majorante de T (em S) é um elemento $b \in S$ tal que $x \leq b, \forall x \in T$. Um supremo de T em S é um majorante b tal que, se c é outro majorante então $b \leq c$.*

Definição 3.4.5. *Seja S um conjunto parcialmente ordenado. Diremos que S é totalmente ordenado se, dados, $x, y \in S$, tivermos, necessariamente, $x \leq y$, ou $y \leq x$.*

Exemplo **3.4.2.** $\mathbb{R}$*, conjunto dos números reais, é totalmente ordenado.*

Definição 3.4.6. *Diremos que S é estritamente indutivamente ordenado se todo subconjunto não vazio totalmente ordenado possuir supremo.*

LEMA DE ZORN

Seja S um conjunto não vazio indutivamente ordenado. Então existe um elemento maximal em S.

Demonstração: Ver **LANG**, Serg. Estruturas Algébricas. Tradutor: Prof. Cláudio R. W. Abramo. Rio de Janeiro, Ao livro técnico; Brasília, Instituto Nacional do Livro, 1972.

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K (qualquer).

Definição 3.4.7. *Diremos que uma família $\{v_i\}_{i\in I}$ é linearmente independente se sempre que tivermos uma família $\{a_i\}_{i\in I}$ com $a_i \in \mathbb{K}$, e todos os a_i iguais a zero a menos de um número finito de índices i, e ainda se $\sum_{i\in I} a_i v_i = 0$, então todos os $a_i = 0$.*

Definição 3.4.8. *Dizemos que uma família $\{v_i\}_{i\in I}$ de elementos de V gera V se todo elemento $v \in V$ pode ser escrito na forma*
$v = \sum_{i\in I} a_i v_i$, para alguma família $\{a_i\}_{i\in I}$ com $a_i \in \mathbb{K}$, onde os a_i são iguais a zero a menos de um número finito de índices.
Uma família $\{v_i\}_{i\in I}$ que gera V e que é linearmente independente (LI) é chamada uma base para V.

Teorema 3.4.9. *Seja V um espaço vetorial, não nulo, sobre o corpo K. Então existe uma base para V.*

Demonstração: Seja S o conjunto dos subconjuntos linearmente independentes de V. Então S é não-vazio, pois para todo $v \in V$, $v \neq 0$, $\{v\}$ é linearmente independente. Se B e B' são elementos de S, definimos $B \leq B'$ se $B \subseteq B'$. O conjunto S é ,então, parcialmente ordenado e indutivamente ordenado, pois se T é um subconjunto totalmente ordenado de S,

$$\bigcup_{B\in T} B$$

é um majorante para T em S. Aplicando o lema de Zorn, seja então M um elemento maximal. Seja $v \in V$. Como M é maximal, se $v \notin M$

o conjunto $M \cup \{v\}$ não é linearmente independente. Logo, existem elementos $a_w \in \mathbb{K}$ $(w \in M)$ e $b \in \mathbb{K}$, não todos nulos (os elementos não nulos são uma quantidade finita) tais que

$$bv + \sum_{w \in M} a_w w = 0.$$

Se $b = 0$, entramos em contradição com o fato de que M é linearmente independente. Assim $b \neq 0$, e

$$v = \sum_{w \in M} -b^{-1} a_w w$$

é uma combinação linear de elementos de M. Se $v \in M$, então v é, obviamente, uma combinação linear de elementos de M. Assim, M gera V, e é a base desejada para V.

Resultados sobre dependência linear em $C^{n-1}(I)$,
$I \subseteq \mathbb{R}$, **intervalo aberto**.

WRONSKIANO

$$C^{n-1}(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid \exists f^{(n-1)} : I \to \mathbb{R} \text{ e } f^{(n-1)} \text{ é contínua em } I\}.$$

Definição 3.4.10. *Sejam $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ funções pertencentes a $C^{n-1}(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$, intervalo aberto .*

O Wronskiano de $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ é definido da seguinte maneira:

$$W(y_1(x), \cdots, y_n(x)) = det \begin{bmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.4.11. *Sejam $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ funções pertencentes a $C^{n-1}(I)$. Se $W(y_1(x_0), \cdots, y_n(x_0)) \neq 0$, para algum $x_0 \in I$, então $\{y_1(x), \cdots, y_n(x)\}$ é LI em I.*

Demonstração: Ver **KREIDER**, Donald L.. **KULLER**, Robert G.. **OSTBERG**, Donald R.. Equações Diferenciais. Tradução: Elza F..São Paulo. Edgard Blücher. Editora: Universidade de São Paulo. 1972.

Teorema 3.4.12. *Dadas* $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ *funções pertencentes a* $C^{n-1}(I)$ *e soluções de uma mesma equação diferencial ordinária linear normal de ordem* n.
Se $W(y_1(x), \cdots, y_n(x)) \equiv 0$ *em* I, *então* $\{y_1(x), \cdots, y_n(x)\}$ *é LD em* I.

Demonstração: Ver **KREIDER**, Donald L.. **KULLER**, Robert G.. **OSTBERG**, Donald R.. Equações Diferenciais. Tradução: Elza F..São Paulo. Edgard Blücher. Editora: Universidade de São Paulo. 1972.

Capítulo 4

Transformações Lineares

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$, e n, m números naturais.

Definição 4.0.13. *Uma função* $T: V \rightarrow W$ *é dita linear se satisfaz:*

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$
(ii) $T(\lambda u) = \lambda u$ $\quad \forall u, v \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$

Definição 4.0.14. *Uma transformação linear* $T: V \rightarrow V$ *é dita operador linear.*

Definição 4.0.15. *O conjunto*
$\mathbb{L}(V,W) = \{\ T: V \rightarrow W \mid T$ *é linear*$\}$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$.

Notação: $\mathbb{L}(V) = \mathbb{L}(V,V)$.

Proposição 4.0.16. *Se* $T: V \rightarrow W$ *é linear então* $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Definição 4.0.17. *Seja* $T \in \mathbb{L}(V,W)$. *Chamaremos de núcleo de* T *, o conjunto* $Ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = \mathbf{0}\}$ *(* $\mathbf{0}$ *elemento neutro de W.) e de conjunto imagem de* T*, o conjunto*
$Im(T) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ tal que} T(v) = w\}$.

Proposição 4.0.18. *Seja* $T \in \mathbb{L}(V,W)$.
Ker(T) é um subespaço vetorial de V, e Im (T) é um subespaço vetorial de W.

Proposição 4.0.19. *Seja* $T \in \mathbb{L}(V, W)$.

$$T \text{ é injetiva se, e somente se, } Ker(T) = \{\boldsymbol{0}\}.$$

Proposição 4.0.20. *Seja* $T \in \mathbb{L}(V, W)$.

T é injetiva se, e somente se, T leva conjunto LI em conjunto LI.

Definição 4.0.21. *Sejam* $T, S \in \mathbb{L}(V)$. *Definiremos*

$$ST(v) = S \circ T(v)\ \forall v \in V.$$

Proposição 4.0.22. *Sejam* $U, T, S \in \mathbb{L}(V)$.
Valem as seguintes propriedades:

1. $(UT)S = U(TS)$.
2. $U(T + S) = UT + US$.
3. $(T + S)U = TU + SU$.
4. $IT = TI = T$.
5. $k(TS) = (kT)S = T(kS), \forall k \in \mathbb{K}$.

   Portanto, $\mathbb{L}(V)$ *é uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$.

Proposição 4.0.23. *Uma transformação linear* $T\colon V \to W$ *é bijetiva se, e somente se, existe* $S \in \mathbb{L}(W, V)$ *tal que* $S \circ T = I : V \to V$ *e* $T \circ S = I : W \to W$.

Definição 4.0.24. *Uma transformação linear* $T\colon V \to W$ *que é bijetiva é dita isomorfismo linear e os espaços vetoriais* V, W *isomorfos. Quando* $V = W$, *a transformação linear* T *é chamada de automorfismo.*

Proposição 4.0.25. *A inversa de uma transformação linear bijetora é também linear.*

Proposição 4.0.26. *Sejam* $T\colon V \to W$ *linear. Se* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *é uma base de* V *então* $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ *gera* $Im(T)$.

Teorema 4.0.27. *(Núcleo e Imagem) Sejam* V, W *espaços vetoriais de dimensão finita e* $T \in \mathbb{L}(V, W)$. *Então:* $\dim V = \dim Ker(T) + \dim Im(T)$.

Proposição 4.0.28. *Sejam* $T : V \to W$ *linear e* $\dim V = \dim W < \infty$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) T *é bijetiva*
(ii) T *é injetiva*
(iii) T *é sobrejetiva*

Proposição 4.0.29. *Seja* $T \in \mathbb{L}(V, W)$, $\dim V = \dim W < \infty$. T *é bijetiva se, e somente se,* T *leva conjunto base em conjunto base.*

Proposição 4.0.30. *Se* $T : V \to W$ *é linear,* $\dim V = n$ *e* $\dim W = m$, *então* $T(v) = Av$, *onde* $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, *a matriz* A *é única a memos de isomorfismo.*

Proposição 4.0.31. *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais tais que* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *é uma base de* V *e* $\{w_1, \cdots, w_n\}$ *vetores arbitrários em* W. *Então* $\exists! T : V \to W$ *linear tal que* $T(v_i) = w_i \ i = 1, \cdots, n$.

Definição 4.0.32. *Sejam* $T : V \to W$ *linear,* $\dim V = n$, $\dim W = = m$, $\beta_V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *e* β_W *bases de* V *e* W, *respectivamente. Dizemos que* $[T]^{\beta_V}_{\beta_W} = \Big[\ [T(v_1)]_{\beta_W} \ \ | \ \ \cdots \ \ | \ \ [T(v_n)]_{\beta_W}\ \Big]_{m\times n}$ *é a matriz de* T *em relação as bases* β_V *e* β_W.

Definição 4.0.33. *Quando* β *e* β' *são bases de* V *e* $I : V \to V$ *é a identidade, a matriz de* I *em relação às bases* β *e* β' *é chamada matriz mudança de base de* β *para* β'.

Notação: $[I]^{\beta}_{\beta'}$.

Proposição 4.0.34. *Sejam* V , W *espaços vetoriais de dimensão finita e T:* $V \to W$ *linear. Considere* α, α' *bases de* V *e* β, β' *bases de* W *então:*

$$[T]^{\alpha'}_{\beta'} = [I]^{\beta}_{\beta'} \cdot [T]^{\alpha}_{\beta} \cdot [I]^{\alpha'}_{\alpha}.$$

Representação gráfica:

$$\begin{array}{ccc} [V]_{\alpha'} \in V & \xrightarrow{T} & [w]_{\beta'} \in W \\ \Big\downarrow I & & \Big\uparrow I \\ [V]_{\alpha} \in V & \xrightarrow{T} & [w]_{\beta} \in W \end{array}$$

Observação 4.0.35. *Observe que* $[T]_{\beta'}^{\alpha'}$ *e* $[T]_{\beta}^{\alpha}$ *são matrizes semelhantes.*

Proposição 4.0.36. *Seja* $T \in \mathbb{L}(V, W)$, $\dim V < \infty$ *e* $\dim W < \infty$. *T é bijetiva se, e somente se, existem* α *e* β *bases de* V *e* W*, respectivamente, tal que* $[T]_{\beta}^{\alpha}$ *é inversível (ou invertível).*

Proposição 4.0.37. *Sejam V e W de dimensão* n *e* m*, respectivamente. Então* $\mathbb{L}(V, W) \simeq \mathbb{M}_{m\times n}(K)$. *Em particular,* $\dim \mathbb{L}(V, W) = n \cdot m$.

Proposição 4.0.38. *Sejam A e B matrizes semelhantes, então posto* $(A) =$ $= posto(B)$.

Proposição 4.0.39. *Sejam* $S, T \in \mathbb{L}(V)$, $\dim V < \infty$. *Sejam* $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ *bases de* V. *Se* $A = [T]_{\beta_1}^{\beta_2}$ *e* $B = [S]_{\beta_2}^{\beta_3}$ *então* $AB = [TS]_{\beta_1}^{\beta_3}$.

Proposição 4.0.40. V, W *espaços vetoriais, sobre um mesmo corpo* $\mathbb{K}$*, de dimensão* n *e* m *respectivamente. Sejam* $T \in \mathbb{L}(V, W)$, β_1 *base de* V *e* β_2 *base de* W. *Considere* $A = [T]_{\beta_2}^{\beta_1} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Então:* $\dim V = posto(A) + \dim(Ker(T))$.

Definição 4.0.41. V, W *espaços vetoriais, sobre um mesmo corpo* $\mathbb{K}$*, de dimensão* n *e* m *respectivamente. Sejam* $T \in \mathbb{L}(V, W)$, β_1 *base de* V *e* β_2 *base de* W. *Considere* $A = [T]_{\beta_2}^{\beta_1} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Definimos* $Nul(A) = \dim(Ker(T))$.

4.1 Exercícios Resolvidos

Exercício **4.1.1.** *Verifique se são operadores lineares no espaço $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$:*

(a) T: $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ *tal que* $F(f(t)) = tf'(t)$, $\forall f(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

(b) T: $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ *tal que* $F(f(t)) = f'(t) + t^2 f''(t)$, $\forall f(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

SOLUÇÃO

Vamos verificar se valem as condições para que uma função, cujo domínio e contra-domínio são espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares, seja uma transformação linear.

(a) Observe que o conjunto $\beta = \{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ é uma base para $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. E como dimensão de um espaço vetorial é um invariante, ou seja , não depende da base escolhida, temos que a dimensão de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ é $n+1$ (Ver Capítulo 2: Espaços Vetoriais sobre $\mathbb{K}$).

(b) Devemos mostrar que a função T satisfaz as condições para ser uma transformação linear.

Sejam $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, $g(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ e $k \in K$(corpo de escalares). Observe que

$T(f(t)) = T\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i a_i t^{i-1}$ daí,

$$\begin{aligned}
(i)\ T((f+g)(t)) &= T\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)t^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i(a_i + b_i)t^{i-1} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} i a_i t^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} i b_i t^{i-1} = \\
&= T(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i) + T(\sum_{i=0}^{n} b_i t^i) = T(f(t)) + T(g(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii)\ T(kf(t)) &= T\left(\sum_{i=0}^{n}(ka_i)t^i\right) = \sum_{i=1}^{n}(kia_i)t^{i-1} = \\ &= k(\sum_{i=1}^{n} ia_it^{i-1}) = kT(\sum_{i=0}^{n} a_it^i) = \\ &= kT(f(t))\end{aligned}$$

Como as condições i e ii são satisfeitas, podemos concluir que T é linear.

Em vez de trabalharmos com o espaço $\mathbb{P}_n$, de dimensão $n+1$, poderíamos trabalhar com o espaço $C^\infty(\mathbb{R})$, de dimensão infinita, e ainda assim teríamos que as funções dadas nos ítens (a) e (b) são transformações lineares. Vejamos a seguir:

(a) F: $C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t)) = tf^{'}(t)$, $\forall f(t) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.
Considere $g, h \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$ constante, observemos que:

$$\begin{aligned}F(g(t)+kh(t)) &= F((g+kh)(t)) = t(g+kh)^{'}(t) = \\ &= tg^{'}(t) + t(kh)^{'}(t) = tg^{'}(t) + tk(h)^{'}(t) = \\ &= F(g(t)) + kF(h(t))\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que F definida acima é uma transformação linear.

(b) F: $C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t)) = f^{'}(t) + t^2f^{''}(t)$, $\forall f(t)C^\infty(\mathbb{R})$.

Considere $g, h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$ constante, observemos que:

$$\begin{aligned}
F(g(t)+kh(t)) &= F((g+kh)(t)) = t(g+kh)^{'}(t) = \\
&= (g+kh)^{'}(t) + t^2(g+kh)^{''}(t) = \\
&= g^{'}(t) + (kh)^{'}(t) + t^2 g^{''}(t) t^2 (kh)^{''}(t) = \\
&= g^{'}(t) + k(h)^{'}(t) + t^2 g^{''}(t) + t^2 k(h)^{''}(t) = \\
&= g^{'}(t) + t^2 g^{''}(t) + k(h)^{'}(t) + t^2 k(h)^{''}(t) = \\
&= F(g(t)) + kF(h(t))
\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que F definida acima é uma transformação linear. ■

Exercício **4.1.2.** *Seja $u = (x, y, z, t)$ um vetor genérico do $\mathbb{R}^4$. Quais das aplicações abaixo definidas são aplicações lineares do $\mathbb{R}^4$?*

(a) $F(u) = u + (1, 0, 1, 0)$;

(b) $F(u) = (1, 0, 1, 1)$;

(c) $F(u) = (x, y - z, y + z, x + t)$;

(d) $F(u) = (cosx, y, z, t)$.

SOLUÇÃO

(a) $F(u) = u + (1, 0, 1, 0)$. Observe que tal função não poderia ser linear, pois

$$F((0,0,0,0)) = (0,0,0,0) + (1,0,1,0) = (1,0,1,0) \neq (0,0,0,0).$$

Observe ainda que F, como definida acima, não satisfaz nenhuma das duas condições para que uma função cujos domínios e contra-domínios são espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares, seja linear.

(b) $F(u) = (1,0,1,1)$. Observe que tal função não poderia ser linear, pois $F((0,0,0,0)) = (1,0,1,1) \neq (0,0,0,0)$.
Observe ainda que F, como definida acima, é tal que
$F(ku) = (1,0,1,1) \neq ku, \forall k \in (\mathbb{R} - \{1\})$ ou $\forall u \in (\mathbb{R}^4 - (1,0,1,1))$.

(c) $F(u) = (x, y-z, y+z, x+t)$. Sejam $u = (x,y,z,t)$, e $v = (x_1, y_1, z_1, w_1)$.
Então $u + v = (x + x_1, y + y_1, z + z_1, t + t_1)$

F é linear, pois

$$\begin{aligned}
(i)\ F(u+v) &= F(x + x_1, y + y_1, z + z_1, t + t_1) = \\
&= \Big(x + x_1, (y + y_1) - (z + z_1), (y + y_1) + (z + z_1), \\
&\quad (x + x_1) + (t + t_1)\Big) = \\
&= (x, y - z, y + z, x + t) + \\
&\quad +(x_1, y_1 - z_1, y_1 + z_1, x_1 + t_1) = F(u) + F(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii)\ F(ku) &= F((x,y,z,t)) = \Big(kx, k(y-z), k(y+z), k(x+t)\Big) = \\
&= k(x, y-z, y+z, x+t) = kF(u)
\end{aligned}$$

(d) $F(u) = (cos x, y, z, t)$. F não é linear, pois a função cosseno não é uma transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. ■

Exercício **4.1.3.** *É possível existir uma transformação linear injetora $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$? Por que?*

SOLUÇÃO

Não é possível existir uma transformação linear injetora $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos que

$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Nuc(T)) + \dim(Im(T)) \leq \dim(Nuc(T)) + 2$, portanto $3 \leq 2 + \dim(Nuc(T)) \Leftrightarrow \dim(Nuc(T)) \geq 1$, ou seja, T não pode ser injetiva. ■

Mais geralmente: Seja $T : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, T transformação linear onde $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. T não pode ser injetora.

Exercício 4.1.4. *É possível existir uma transformação linear sobrejetora $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$? Por que?*

SOLUÇÃO

Não é possível existir uma uma transformação linear sobrejetora $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos que $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(Nuc(T)) + \dim(Im(T))$, portanto $\dim(Im(T)) \leq 2$, ou seja, T não é pode ser sobrejetora já que a dimensão do espaço contra-domínio é 3, $Im(T) \subsetneq \mathbb{R}^3$. ■

Observação 4.1.1. *Mais geralmente: Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, T transformação linear onde $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. T não pode ser sobrejetora. Observe que estamos trabalhando com espaços vetoriais de dimensão finita. O Teorema do Núcleo e da Imagem* ***não é necessariamente válido*** *para transformações cujos domínios sejam espaços vetoriais de dimensão infinita. Ver Apêndice I.*

Exercício 4.1.5. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ transformação linear. Mostre que se T não é sobrejetora, então T não é injetora.*

SOLUÇÃO

Basta aplicarmos o Teorema do Núcleo de da Imagem, se T não é sobrejetiva,
$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, temos $\dim Im(T) < 2 \Leftrightarrow \dim Nuc(T) > 0$ (pois $\dim Nuc(T) = 2 - \dim(Im(T))$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem), ou seja, T não é injetiva. ■

Observação 4.1.2. *Mais geralmente: Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, T transformação linear. T não é sobrejetora $\Leftrightarrow$ T não é injetora.* ***Vale o resultado mais geral: Todo operador linear, entre espaços de dimensão finita, é injetivo se, e somente se, é sobrejetivo. Daí, um operador linear injetivo é sobrejetivo e vice-versa e, portanto, é um automorfismo. Isto é uma conseqüência do Teorema do Núcleo e da Imagem.***

Exercício **4.1.6.** *Seja $\mathbb{P}_3$ = conjunto dos polinômios com grau menor ou igual a 3, e*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{P}_3 & \rightarrow & \mathbb{P}_3 \\ & f & \rightarrow & f'(derivada) \end{array}$$

(a) Mostre que $\mathbb{P}_3$ é um espaço vetorial de dimensão 4.

(b) Mostre que T é uma transformação linear.

(c) Determine $Ker(T)$ e $Im(T)$ e encontre uma base para cada um destes subespaços vetoriais.

SOLUÇÃO

(a) Observe que o conjunto $\beta = \{1, t, t^2, t^3\}$ é uma base para $\mathbb{P}_3$. E como dimensão de um espaço vetorial é um invariante, ou seja , não depende da base escolhida, temos que a dimensão de $\mathbb{P}_3$ é 4 (Ver a Lista de Exercícios : Espaços Vetoriais sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

(b) Devemos mostrar que a função T satisfaz as condições para ser uma transformação linear.

Sejam $f(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i t^i$, $g(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} b_i t^i \in \mathbb{P}_3$ e $k \in \mathbb{K}$(corpo de escalares). Observe que $T(f(t)) = T\left(\sum_{i=0}^{3} a_i t^i\right) = \sum_{i=1}^{3} i a_i t^{i-1}$, daí

$$\begin{aligned}
(i)\ T((f+g)(t)) &= T\left(\sum_{i=0}^{3}(a_i+b_i)t^i\right) = \sum_{i=1}^{3} i(a_i+b_i)t^{i-1} = \\
&= \sum_{i=1}^{3} i a_i t^{i-1} + \sum_{i=1}^{3} i b_i t^{i-1} = \\
&= T\left(\sum_{i=0}^{3} a_i t^i\right) + T\left(\sum_{i=0}^{3} b_i t^i\right) = \\
&= T(f(t)) + T(g(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii)\ T(kf(t)) &= T\left(\sum_{i=0}^{3}(ka_i)t^i\right) = \sum_{i=1}^{3}(kia_i)t^{i-1} = k(\sum_{i=1}^{3} i a_i t^{i-1}) = \\
&= kT\left(\sum_{i=0}^{3} a_i t^i\right) = kT(f(t))
\end{aligned}$$

Como as condições i e ii são satisfeitas, podemos concluir que T é linear.

(c)

$$\begin{aligned}
Ker(T) = Nuc(T) &= \{f \in \mathbb{P}_3 \text{ tal que } f^{'}(t) = 0\} = \\
&= \{f(t) = \sum_{i=0}^{3} a_i t^i, a_i \in K, \mid \sum_{i=1}^{3} i a_i t^{i-1} = 0\} = \\
&= \{f(t) = \sum_{i=0}^{3} a_i t^i \ \mid\ a_i = 0, i = 1, \ldots, 3\} = \\
&= \{f(t) = a_0;\ a_0\ \in K\}.
\end{aligned}$$

$Im(T) = \{g \in \mathbb{P}_3 \mid\ \exists f \in \mathbb{P}_3 \text{ tal que } f^{'}(t) = g(t)\} = \mathbb{P}_2$. De fato, para $\forall g(t) = \sum_{i=0}^{2} a_i t^i \in \mathbb{P}_2$ considere $f(t) = \sum_{i=1}^{3} (\frac{a_{i-1}}{i}) t^i + k$, k (constante) $\in K$. Observe que $f^{'}(t) = \sum_{i=0}^{2} a_i t^i = g(t)$. ■

Exercício **4.1.7.** *Considere a transformação linear*

$$T: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \quad \mathbb{R}^3 \quad \textit{dada por} \quad T(x, y, z) = (z, x - y, -z).$$

(a) Determine uma base do núcleo de T.

(b) Dê a dimensão da imagem de T.

(c) T é sobrejetora? Justifique.

(d) Faça um esboço de KerT e ImT.

SOLUÇÃO

(a) $Ker(T) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = (0, 0, 0)\}$, ou seja,
$Ker(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (z, x - y, -z) = (0, 0, 0)\}$, portanto
$v \in Ker(T) \Leftrightarrow v = (x, y, z)$, onde $x = y$ e $z = 0$,
ou seja, $v \in Ker(T) \Leftrightarrow v = (x, x, 0)$. Logo $Ker(T) = [(1, 1, 0)]$.

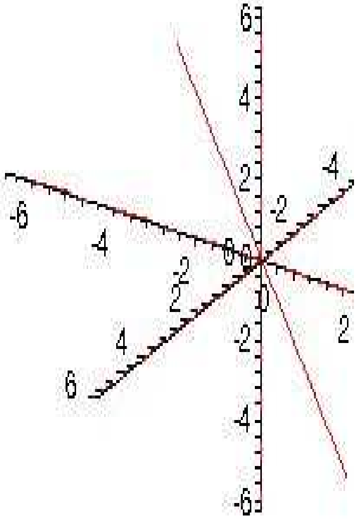
(b) Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que $\dim(\mathbb{R}^3) =$
$= \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$, portanto $3 = 1 + \dim(Im(T)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim(Im(T)) = 2$.

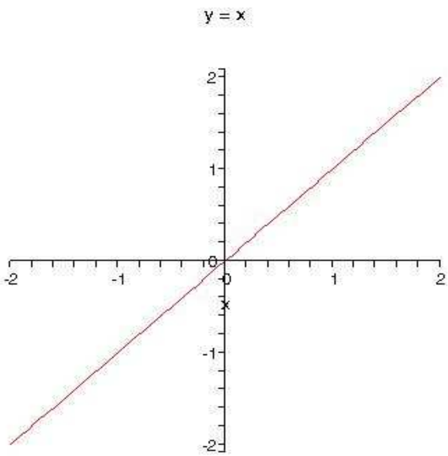
(c) T não é sobrejetora, pois a dimensão do espaço contra-domínio é 3 ($= \dim(\mathbb{R}^3)$) e $\dim(Im(T)) = 2$, ou seja, $Im(T) \subsetneq \mathbb{R}^3$.

(d) $v \in Ker(T) \Leftrightarrow v = (x, x, 0)$, ou seja, $Ker(T) = [(1, 1, 0)]$. Portanto,

$$Ker(T) = \{(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_0, y_0, z_0) = t \cdot (1, 1, 0) \text{ algum } t \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, $Ker(T)$ é a reta, contida em $\mathbb{R}^3$, que passa pela origem e





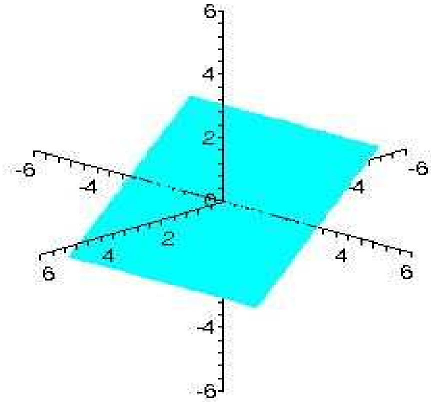
$Im(T) = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \exists v \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(v) = w\}$.
Observemos que pela expressão de T,

$$T(x, y, z) = (z, x - y, -z) = z \cdot (1, 0, -1) + (x - y) \cdot (0, 1, 0)$$

portanto, $Im(T) = [(1, 0, -1), (0, 1, 0)]$. Observemos também que $\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ é L.I.(linearmente independente).

$Im(T)$ é o plano que passa pelos pontos $(0, 0, 0)$ (origem), $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, 0)$.

Esboço de $Im(T)$:



■

Exercício 4.1.8. *Seja $T : E \to E$ um operador linear. Prove que $T^2 \equiv 0$ se, e somente se, $Im(T) \subseteq Nuc(T)$.*

SOLUÇÃO

$\forall v \in E,\ T(T(v)) = T^2(v) = 0 \Leftrightarrow T(v) \in Nuc(T), \forall v \in E \ \Leftrightarrow\ Im(T) \subseteq$
$\subseteq Nuc(T)$. ■

Exercício 4.1.9. *Tome em $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ as bases $\beta = \{1,\ t,\ t^2,\ t^3\}$ e $\beta' = \{1,\ 1+t,\ t+t^2,\ t^2+t^3\}$. Calcule as matrizes $[D]^{\beta}_{\beta'}$, $[D]^{\beta'}_{\beta}$, $[D]^{\beta'}_{\beta'}$, onde $D : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ é o operador derivação.*

SOLUÇÃO

(i) Observemos que:

$$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1+t) + 0 \cdot (t+t^2) + 0 \cdot (t^2+t^3);$$
$$D(t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+t) + 0 \cdot (t+t^2) + 0 \cdot (t^2+t^3);$$
$$D(t^2) = 2t = -2 \cdot 1 + 2 \cdot (1+t) + 0 \cdot (t+t^2) + 0 \cdot (t^2+t^3);$$
$$D(t^3) = 3t^2 = 3 \cdot 1 - 3 \cdot (1+t) + 3 \cdot (t+t^2) + 0 \cdot (t^2+t^3)$$

$$\text{daí } [D]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Observemos que:

$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (t) + 0 \cdot (t^2) + 0 \cdot (t^3)$;

$D(1 + t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (t) + 0 \cdot (t^2) + 0 \cdot (t^3)$;

$D(t + t^2) = 1 + 2t = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (t) + 0 \cdot (t^2) + 0 \cdot (t^3)$;

$D(t^2 + t^3) = 2t + 3t^2 = 0 \cdot 1 + 2 \cdot (t) + 3 \cdot (t^2) + 0 \cdot (t^3)$

$$\text{daí } [D]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) Observemos que:

$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1 + t) + 0 \cdot (t + t^2) + 0 \cdot (t^2 + t^3)$;

$D(1 + t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1 + t) + 0 \cdot (t + t^2) + 0 \cdot (t^2 + t^3)$;

$D(t + t^2) = 1 + 2t = -1 \cdot 1 + 2 \cdot (1 + t) + 0 \cdot (t + t^2) + 0 \cdot (t^2 + t^3)$;

$D(t^2 + t^3) = 2t + 3t^2 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (1 + t) + 3 \cdot (t + t^2) + 0 \cdot (t^2 + t^3)$

$$\text{daí } [D]_{\beta'}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Exercício **4.1.10.**

Seja V o espaço vetorial de matrizes 2 X 2 com base canônica

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Se $T : V \to \mathbb{R}^2$ é dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d,\ b + c)$.

Ache $[T]_\alpha^\beta$ onde α é a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

(b) Se $S : \mathbb{R}^2 \to V$ e $[S]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ache S e, se for possível, (a, b) tal que $S(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO

(a)

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1, 0) \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0, 1)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0, 1) \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1, 0)$$

Portanto $[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b)

$$[S(x, y)]_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x - y \\ -x \\ y \end{bmatrix}$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
S(x,y) &= (2x+y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (x-y)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \\
&\quad +y\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2x+y & x-y \\ -x & y \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Não é possível obter (a,b) tal que $S(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

pois

$$
\begin{bmatrix} 2a+b & a-b \\ -a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b = 1 \\ a-b = 0 \\ -a = 0 \\ b = 1. \end{cases}
$$

Observe que este sistema é impossível. ■

Exercício **4.1.11.** *Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,0) = (2,0)$, $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$. Encontre $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3,2)$.*

SOLUÇÃO

Considere $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ as bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente

A representação matricial de T em relação às bases canônicas é:

$$
[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

Portanto,

$$\text{seja } v \in \mathbb{R}^3; [v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

$$[T(x,y,z)]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ y-z \end{bmatrix}$$

Ou seja, $T(x,y,z) = (2x+y)\cdot(1,0) + (y-z)\cdot(0,1) = (2x+y, y-z)$.

Considere $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, a base canônica do $\mathbb{R}^3$, e seja $[v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$;

Pelo item a) temos que $T(x,y,z) = (2x+y, y-z) = (3,2)$. Portanto, $\begin{cases} 2x+y=3 \\ y-z=2 \end{cases}$, ou seja, $v = (\frac{3-y}{2}, y, y-2)$. Em particular, $v = (\frac{3}{2}, 0, -2)$ é tal que $T(v) = (3,2)$ ■

Exercício **4.1.12.** *Sejam* $\alpha = \{(1,-1),(0,2)\}$ *e* $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$, *respectivamente e*

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Ache T.

(b) Se $S(x,y) = (2y, x-y, x)$, *ache* $[S]^\alpha_\beta$.

(c) Ache uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

SOLUÇÃO

(a) Considere $[I]^{can}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ a matriz mudança da base canônica do $\mathbb{R}^2$ para a base α,

e $[I]^{\beta}_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ a matriz mudança da base β para a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

A matriz que representa a transformação T em relação às bases canônicas do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ pode ser obtida pelo seguinte produto matricial:

$$
\begin{aligned}
[T]^{can}_{can} &= [I]^{\beta}_{can} \cdot [T]^{\alpha}_{\beta} \cdot [I]^{can}_{\alpha} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
[T(x,y)]_{can} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x-y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \\ 2x+y \end{bmatrix},
$$

ou seja,

$$T(x,y) = (\tfrac{x-y}{2})\cdot(1,0,0) + (\tfrac{x-y}{2})\cdot(0,1,0) + (2x+y)\cdot 0,0,1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T(x,y) = (\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}, 2x+y)$$

(b) Como $S(x,y) = (2y, x-y, x)$, então $[S]_{can}^{can} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

A representação matricial da transformação linear S em relação às bases α e β pode ser obtida pelo seguinte produto matricial:

$$\begin{aligned}
[S]_\beta^\alpha &= [I]_\beta^{can}\cdot[S]_{can}^{can}\cdot[I]_{can}^\alpha = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{-11}{3} & \frac{20}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{-8}{3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto, $[S]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{-11}{3} & \frac{20}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{-8}{3} \end{bmatrix}$.

(c) Seja $\{v_i = (x_i, y_i, z_i)\}, i = 1, 2, 3$ a base γ. Como

$[T]_\gamma^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ temos que $[T(1,-1)]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $[T(0,2)]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

portanto, $T(1,-1) = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = v_1$ e $T(0,2) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = v_3$. Usando o item a) temos $T(1,-1) = (1,1,1)$ e $T(0,2) = (-1,-1,2)$. Logo $(1,1,1) = v_1$ e $(-1,-1,2) = v_3$ são dois vetores que compõem tal base e, portanto, basta escolhermos $v_2 \notin [(1,1,1),(-1,-1,2)]$.

Outra maneira: Seja $\{v_i = (x_i, y_i, z_i)\}, i = 1,2,3$ a base γ, considere a matriz mudança da base γ para a base canônica do $\mathbb{R}^3$

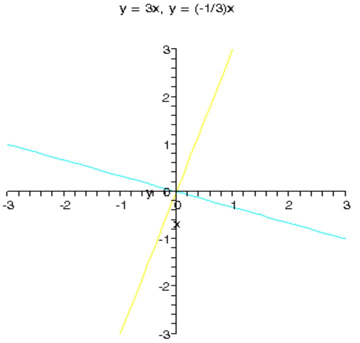
$$[I]^{\gamma}_{can} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} [T]^{can}_{can} &= [I]^{\gamma}_{can} \cdot [T]^{\alpha}_{\gamma} \cdot [I]^{can}_{\alpha} = \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_3 & \frac{1}{2}x_3 \\ y_1 + \frac{1}{2}y_3 & \frac{1}{2}y_3 \\ z_1 + \frac{1}{2}z_3 & \frac{1}{2}z_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Daí, } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_3 & \frac{1}{2}x_3 \\ y_1 + \frac{1}{2}y_3 & \frac{1}{2}y_3 \\ z_1 + \frac{1}{2}z_3 & \frac{1}{2}z_3 \end{bmatrix}.$$

Logo, $(1,1,1) = v_1$, $(-1,-1,2) = v_3$ e podemos escolher como v_2 qualquer vetor em $\left(\mathbb{R}^3 - [(1,1,1),(-1,-1,2)]\right)$. ■

Exercício 4.1.13. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma reflexão através da reta $y = 3x$.*



(a) Encontre $T(x, y)$.

(b) Encontre uma base α de $\mathbb{R}^2$, tal que

$$[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

(a) Considere no plano as retas $s : y = -\frac{1}{3}x$ e $r : y = 3x$. Observe que $s \perp r$.

Considere também $v_1 = (1, 3)$ vetor direção da reta r, e $v_2 = (-3, 1)$, vetor direção da reta s.

Observe que $\{v_1, v_2\}$ é LI , pois são vetores ortogonais $(s \perp r)$ e, portanto, $\beta = \{v_1, v_2\}$ forma uma base para o $\mathbb{R}^2$.

$T(1, 3) = (1, 3)$, pois T é uma reflexão e, portanto, T preserva $v \in \mathbb{R}^2, v \parallel (1, 3)$. $T(-3, 1) = -(-3, 1)$.

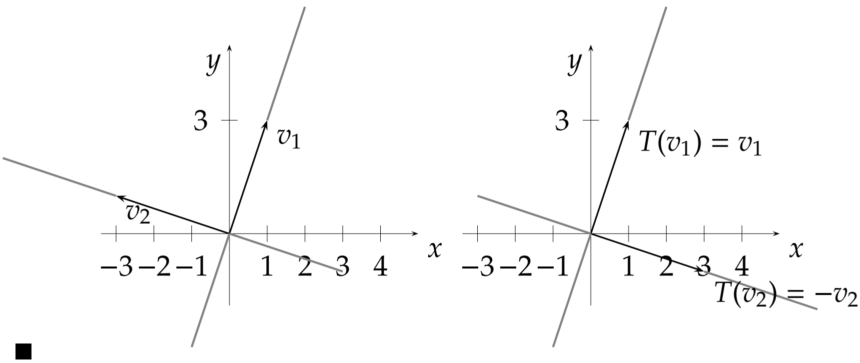
Logo, a representação matricial da transformação acima em relação à base $\beta = \{(1, 3), (-3, 1)\}$ é: $[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Vamos determinar a representação matricial da transformação T, definida acima, em relação à base canônica.

$$\begin{aligned} [T]^{can}_{can} &= [I]^{\beta}_{can} \cdot [T]^{\beta}_{\beta} \cdot [I]^{can}_{\beta} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Portanto } [T(x, y)]_{can} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

(b) Podemos considerar α um conjunto qualquer $\{w_1, w_2\}$ onde $w_1 \parallel (1,3)$ e $w_2 \parallel (-3,1)$. Em particular, poderíamos considerar $\alpha = \{(1,3), (-3,1)\}$.



■

Exercício **4.1.14.**

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ onde $T(v)$ é a projeção do vetor no plano $3x + 2y + z = 0$.

(a) Encontre $T(x, y, z)$.

(b) Encontre uma base ordenada β de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$[T]^\beta_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

(a) Considere $\Pi = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y + z = 0\}$, portanto, $v = (x, y, -3x - 2y) = x(1, 0, -3) + y(0, 1, -2)$, daí $\Pi =$ $= [(1, 0, -3), (0, 1, -2)]$. Observe que o vetor $(3, 2, 1)$ é paralelo à n_Π, a normal do plano Π.

O conjunto $\beta = \{(1,0,-3),(3,2,1),(0,1,-2)\}$ forma uma base para o $\mathbb{R}^3$ e é tal que $T(1,0,-3) = (1,0,-3)$, $T(0,1,-2) = (0,1,-2)$, pois $T(v) = v, \forall v \in \Pi$ e $T(3,2,1) = (0,0,0)$, pois $(3,2,1) \parallel n_\Pi$.

A representação matricial da transformação T em relação à base β é dada por:

$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Vamos determinar a representação matricial da transformação T, definida acima, em relação à base canônica.

$$\begin{aligned} [T]_{can}^{can} &= [I]_{can}^{\beta} \cdot [T]_\beta^\beta \cdot [I]_\beta^{can} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{-3}{7} & \frac{-3}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} \\ \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{-3}{7} & \frac{-3}{14} \\ \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{9}{14} & \frac{-1}{7} & \frac{13}{14} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, $[T(x,y,z)]_{can} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{-3}{7} & \frac{-3}{14} \\ \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{9}{14} & \frac{-1}{7} & \frac{13}{14} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

(b) Como $T(v) = v, \forall v \in \Pi$ e $T(w) = 0, \forall w \parallel (3,2,1)$ podemos considerar $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1, v_3 \in \Pi$, tal que $\{v_1, v_3\}$ seja LI(linearmente independente) e $v_2 \parallel (3,2,1)$. Em particular, poderíamos tomar $\beta = \{(1,0,-3),(3,2,1),(0,1,-2)\}$. ■

Exercício **4.1.15.**

Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ onde L é a reflexão através do plano $3x + 2y + z = 0$.

(a) Encontre $L(x, y, z)$.

(b) Encontre uma base ordenada γ de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

(a) Considere $\Pi = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y + z = 0\}$, portanto, $v = (x, y, -3x - 2y) = x(1, 0, -3) + y(0, 1, -2)$, daí $\Pi = [(1, 0, -3), (0, 1, -2)]$. Observe que o vetor (3, 2, 1) é paralelo à n_Π, a normal do plano Π. O conjunto $\beta = \{(1, 0, -3), (0, 1, -2), (3, 2, 1)\}$ forma uma base para o $\mathbb{R}^3$ e é tal que $T(1, 0, -3) = (1, 0, -3)$, $T(0, 1, -2) = (0, 1, -2)$ pois $T(v) = v, \forall v \in \Pi$ e $T(3, 2, 1) = -(3, 2, 1)$, pois $(3, 2, 1) \parallel n_\Pi$.

A representação matricial da transformação T em relação à base β é dada por:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar a representação matricial da transformação

T, definida acima, em relação à base canônica.

$$
\begin{aligned}
[T]_{can}^{can} &= [I]_{can}^{\beta} \cdot [T]_{\beta}^{\beta} \cdot [I]_{\beta}^{can} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & \frac{-3}{7} & \frac{-3}{14} \\ \frac{-3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{-2}{7} & \frac{-6}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$\text{Portanto, } [T(x,y,z)]_{can} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{7} & \frac{-6}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

(b) Como $T(v) = v, \forall v \in \Pi$ e $T(w) = 0, \forall w \parallel (3,2,1)$ podemos considerar $\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1, v_2 \in \Pi$, tal que $\{v_1, v_2\}$ seja L.I.(linearmente independente) e $v_3 \parallel (3,2,1)$. Em particular, poderíamos tomar $\gamma = \{(1,0,-3),(0,1,-2),(3,2,1)\}$. ∎

Exercício **4.1.16.**

Seja $T \in L(V)$. Se para algum $\alpha_0 \neq 0$, tem-se $\alpha_0 I + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_m T^m \equiv 0$, prove que o operador T é invertível.

SOLUÇÃO

De fato,

$$\alpha_0 I + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_m T^m \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\alpha_0 I(v) = (\alpha_1 T + \cdots + \alpha_m T^m)(v), \forall v \in V$$

$$\Leftrightarrow I(v) = T \circ \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_0} + \cdots + \frac{-\alpha_m}{\alpha_0} T^{m-1} \right)(v), \forall v \in V$$

$$\Leftrightarrow I(v) = \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_0} + \cdots + \frac{-\alpha_m}{\alpha_0} T^{m-1} \right) \circ T(v), \forall v \in V. \quad \blacksquare$$

Exercício **4.1.17.**

Dadas as transformações lineares $T : E \to F$, $S : F \to G$, *com* $\dim E < \infty$ $\dim F < \infty$ *e* $\dim G < \infty$, *assinale V (verdadeiro) ou F (falso) nas seguintes implicações:*

(a) ( ) ST é sobrejetiva $\Rightarrow$ S é sobrejetiva.

(b) ( ) ST é sobrejetiva $\Rightarrow$ T é sobrejetiva.

(c) ( ) ST é injetiva $\Rightarrow$ S é injetiva.

(d) ( ) ST é injetiva $\Rightarrow$ T é injetiva.

Prove ainda que se $E = F = G$, *então as quatro implicações são verdadeiras.*

SOLUÇÃO

(a) (V) ST é sobrejetiva $\Rightarrow$ S é sobrejetiva.

Demonstração: De fato, $\forall w \in G, \exists v \in E$ tal que
$ST(v) = w \Rightarrow \forall w \in G, \exists T(v) \in F$ tal que $S(T(v)) = w$.

(b) (F) ST é sobrejetiva $\Rightarrow$ T é sobrejetiva.

Contra-exemplo: Considere

$$\begin{array}{rl} \mathbb{D} : \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \\ p(x) \mapsto p'(x) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rl} \mathbb{S} : \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R}) \\ p(x) \mapsto \int p(x) \end{array}$$

Observe que o $DS = I : \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ é o operador identidade, mas S não é sobrejetiva.

(c) (F) ST é injetiva $\Rightarrow$ S é injetiva.

Contra-exemplo: Considere

$$\begin{array}{rl} \mathbb{D} : \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \\ p(x) \mapsto p'(x) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rl} \mathbb{S} : \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R}) \\ p(x) \mapsto \int p(x) \end{array}$$

Observe que o $DS = I : \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ é o operador identidade, mas D não é injetiva.

(d) (V) ST é injetiva $\Rightarrow$ T é injetiva. Demonstração: De fato, sejam $u, v \in E$, tal que $T(u) = T(v) \Rightarrow S(T(v)) = S(T(w)) \Rightarrow v = w$, pois ST é injetiva.

Se supusermos que $E = F = G$, então BA é injetiva $\Rightarrow A$ é injetiva $\Rightarrow B$ é injetiva.

BA sobrejetiva $\Leftrightarrow$ BA é injetiva $\Rightarrow$ A é injetiva $\Leftrightarrow A$ é sobrejetiva.

4.2 Exercícios Propostos

1. Considere a matriz da transformação linear T dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -4 & -3 & -6 \\ 1 & 4 & 1 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & -6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) Qual a nulidade de T?

(b) Determine uma base para o núcleo de T.

(c) Qual a dimensão da imagem de T?

(d) Determine uma base para a imagem de T.

2. Seja T uma transformação em $\mathbb{R}^2$: $T(x, y) = (k.x, x + y)$, $k \in \mathbb{R}$,

(a) prove que T é linear;

(b) determine k de modo que a transformação T seja inversível e, para cada um desses valores, obtenha a transformação inversa T^{-1};

(c) considere $k = 0$. Determine a dimensão e uma base do núcleo de T.

3. Seja T uma transformação linear em $\mathbb{R}^3$, onde $T(1, 0, 0) = (10, 3, -1)$, $T(0, 1, 0) = (5, 3, -4)$ e $T(0, 0, 1) = (4, 6, -10)$, determine $T(v)$ onde $v = (9, -4, 9)$.

4. Considere o espaço vetorial real $M_2(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem 2. Seja T uma transformação definida em $M_2(\mathbb{R})$:
$T(A) = A - A^t$, $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$,

(a) mostre que T é uma transformação linear;

(b) determine o núcleo de T, a sua dimensão e uma base;

(c) determine a matriz que representa a transformação linear T, supondo fixada a base canônica no espaço $M_2(\mathbb{R})$.

5. Seja $P_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de coeficientes reais de grau menor ou igual 2, considere a transformação linear T, de $P_2(\mathbb{R})$ em si mesmo, definida por $T[p(x)] = p(x+1) - p(x),\ \forall p(x) \in P_2(\mathbb{R})$,

(a) indique, justificando, uma base para a imagem de T;

(b) determine o núcleo da transformação linear T, a sua dimensão e uma base.

6. Seja T uma transformação linear do espaço dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2, $P_2(\mathbb{R})$, na variável x, em si próprio, definida por:

$$T(1) = 1 + x;\ T(x) = 3 - x^2;\ T(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$$

(a) calcule $T(2 - 2x + 3x^2)$;

(b) a transformação T tem inversa? Justifique.

7. Seja T uma transformação linear em $\mathbb{R}^3$ dada por
$T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$,

(a) indique o núcleo de T, a sua dimensão e uma base;

(b) determine a dimensão da imagem de T;

(c) T é sobrejetora? Justifique.

8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que consiste da composição de duas transformações lineares em $\mathbb{R}^2$: a rotação de ângulo θ seguida da reflexão na reta $y = -x$. Qual a matriz de T?

9. Seja $M_2(\mathbb{R})$ o espaço das matrizes 2×2 de elementos reais e considere a transformação linear $R : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por:

$$R\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3a+4d & 3b+4c \\ 4b-3c & 4a-3d \end{bmatrix}$$

(a) Determine a matriz A que representa R em relação à base canônica de $M_2(\mathbb{R})$. Verifique que é válida a relação $A^2 = 25I$, onde I é a matriz identidade.

(b) Mostre que R é inversível e determine a sua inversa.

(c) Resolva a equação linear

$$R(X) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

10. Sendo $T(x, y, z) = (x+2y-z, -y, x+7z)$ a fórmula da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e B a base canônica, sendo B' a base de $\mathbb{R}^3$:

$$B' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

a) represente T na base B;

b) represente T na base B' utilizando a matriz calculada em a);

c) obtenha uma fórmula para a inversa de T;

d) represente T^{-1} na base B'.

11.(a) Verifique se a função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x - 10y, 5y)$ é linear.

(b) Considere a função linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x - z, 2y + 3z)$. Ache o núcleo de T e diga se o vetor $(2, -3, 2)$ pertence ao $N(T)$.

(c) Determine a função linear $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(1,0) = (1,2,3)$ e $F(2,-1) = (0,1,2)$.

(d) Determine a matriz da função que executa em $\mathbb{R}^2$ uma rotação de $90°$ em torno do ponto $A(0,0)$, seguida de uma dilatação de fator 3.

12. Se os vetores $v_1, \cdots, v_m \in V$ geram um subespaço vetorial de dimensão r, prove que o conjunto dos vetores $(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ tais que $x_1v_1 + \cdots + x_mv_m = 0$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ com dimensão $m - r$.
Dica: Considere a transformação linear
$(x_1, \cdots, x_m) \mapsto x_1v_1 + \cdots + x_mv_m$ de $\mathbb{R}^m$ em V e aplique o Teorema do Núcleo e da Imagem.
13. Sem fazer hipóteses sobre as dimensões dos espaços vetoriais, sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$, E e F, sejam $T : E \to F$ e $S : F \to E$ transformações lineares. Se TS é invertível, prove que T é sobrejetiva e S é injetiva. Se TS e ST são invertíveis, prove que T e S são invertíveis. Dica: Use a definição de transformação bijetiva (invertível) e o exercício 17.

4.3 Apêndice

Algumas considerações:

Teorema 4.3.1. *NÚCLEO E IMAGEM*
Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda transformação linear

$$T : E \to F \textit{ tem-se } \dim(E) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)).$$

Demonstração: *Ver* **HOFFMAN**, *Kenneth &* **KUNZE**, *Ray. Álgebra Linear. Editora Polígono: São Paulo. 1971.*

Corolário 4.3.2. *Sejam E, F espaços vetoriais,* $\dim E = \dim F = n$. *Uma transformação linear* $T : E \to F$ *é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva e portanto é um isomorfismo.*
Demonstração: *Ver* **HOFFMAN**, *Kenneth &* **KUNZE**, *Ray. Álgebra Linear. Editora Polígono: São Paulo. 1971..*

O corolário acima não é necessariamente válido num espaço vetorial de dimensão infinita.

Vejamos os seguintes exemplos:

1. Seja $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ definida por:
   $T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, x_3, \cdots)$. T é um operador linear injetivo que não é sobrejetivo, observe que as seqüências $(k, 0, 0, 0, \cdots) \notin Im(T), \forall k \in (\mathbb{R} - \{0\})$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ definida por: $T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, x_4, \cdots)$. T é um operador linear sobrejetivo que não é injetivo, observe que $T(x_1, 0, 0, 0, \cdots) = (0, 0, 0, 0, \cdots)$ e, portanto, $(x_1, 0, 0, 0, \cdots) \in$ $\in Nuc(T), \forall x_1 \in \mathbb{R}$.

Proposição 4.3.3. *Seja* $T \in \mathbb{L}(V)$, $\dim V = n (< \infty)$. *Se* $\exists S \in \mathbb{L}(V)$ *tal que* $S \circ T = I_n$, *então* T *é inversível e* $S = T^{-1}$.

Demonstração: *Ver* **LIMA**, *Elon Lages. Álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 1996.*

Observação 4.3.4. *Se $T: V \to W$ e $S: W \to V$ são funções quaisquer e $S \circ T = I$, então T é injetiva e S é sobrejetiva.*

A proposição acima não é necessariamente válida num espaço vetorial de dimensão infinita.

Vejamos o seguinte exemplo:

1. Considere
   $$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ & p(x) & \rightarrowtail & \int p(x)dx \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} S: & \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ & p(x) & \rightarrowtail & p'(x) \end{array}.$$
   Observemos que $S \circ T(p(x)) = p(x)$,
   contudo $T \circ S(p(x)) = p(x) + C$, C constante real (Ver Teorema Fundamental do Cálculo).

OPERADORES NILPOTENTES

Definição 4.3.5. *$T \in \mathbb{L}(V)$ é dito operador nilpotente se $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k \equiv 0$.*

Definição 4.3.6. *$T \in \mathbb{L}(V)$ é dito operador nilpotente de índice k se $T^k \equiv 0$, $T^{k-1} \neq 0$.*

1. Considere $T \in \mathbb{L}(V)$ e suponha que exista $v \in V$ tal que $T^k(v) = 0$, $T^{k-1}(v) \neq 0$. Então:

   (a) $S = \{v, Tv, T^2v, \cdots, T^{k-1}v\}$ é LI;

   Demonstração: Observemos primeiramente que $v \neq 0$. Se $k = 2$ temos: $T(a_0v + a_1T(v)) = 0 \Rightarrow a_0T(v) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_1T(v) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$. Portanto, para $k = 2$ temos que $\{v, Tv\}$ é LI.

Como T tem índice k, $\forall j, 1 < j < k,\ T^j$ terá índice $k - j$.

Sejam $a_0, \cdots, a_k$ tal que $\sum_{i=0}^{k} a_i T^k(v) = 0$

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i T^{k-1}(v) = 0 \Rightarrow T^{k-1}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i T^k(v)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_0 T^{k-1}(v) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} a_i T^{k-1}(v) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^{k-2}\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i T^k(v)\right) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sum_{i=j}^{k-1} a_i T^k(v)) = 0 \Rightarrow T^{k-(j+1)}\left(\sum_{i=j}^{k-1} a_i T^k(v)\right) = 0 \Rightarrow$$

$a_j = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow a_{k-1} T^{k-1}(v) = 0 \Rightarrow a_{k-1} = 0.$

Logo, $S = \{v, Tv, T^2v, \cdots, T^{k-1}v\}$ é LI.

(b) O subespaço W gerado por S é tal que $T(W) \sqsubseteq W$.

Demonstração: Como $S = \{v, Tv, T^2v, \cdots, T^{k-1}v\}$ é LI, basta observarmos que:

$T(T^i(v)) = T^{i+1}(v) \in W, \forall i = 0, \cdots, k-1.$

(c) A restrição de T ao subespaço W é nilpotente.

Demonstração: Como o conjunto S é uma base para $W = [S]$ e $T(W) \sqsubseteq W$, a matriz que representa a transformação $T\,|_W : W \to W$ em relação à base S é:

$$[T]_S^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que: $([T]_S^S)^k \equiv 0$

Observação 4.3.7. *Com o argumento exposto acima, podemos concluir que:*

Se $\dim V = n$ *então* T *é nilpotente de índice* n *se, e somente se, existe uma base de* V *na qual a matriz de* T *é:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.4 Diagonalização

$\mathbb{K}$ corpo.

Definição 4.4.1. *Sejam $T \in \mathbb{L}(V)$ e V espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, de dimensão n. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se existe $v \in (V \setminus \{0\})$ tal que $T(v) = \lambda v$. Neste caso, dizemos que v é um autovalor de T associado a λ.*

Definição 4.4.2. *Sejam $T \in \mathbb{L}(V)$, $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ e $\alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ bases de V, observemos que $\det([T]_\beta^\beta - xI_n) = \det([T]_\alpha^\alpha - xI_n)$. Definimos $p_T(x) = \det([T]_\beta^\beta - xI_n)$ como o polinômio característico de T. As raízes deste polinômio são os autovalores de T.*

Observação 4.4.3. *A definição de polinômio característico independe da matriz da transformação do operador T, ou seja, não depende da base escolhida para o espaço vetorial V.*

Teorema 4.4.4. *Autovetores associados a autovalores distintos são LI.*

Proposição 4.4.5. *Sejam $T \in \mathbb{L}(V)$, $\dim V = n$,β e β' bases de V. Quando λ é autovalor de T, o conjunto $Ker([T]_\beta^\beta - \lambda I_n)$ é um subespaço vetorial de V e é isomorfo $Ker([T]_{\beta'}^{\beta'} - \lambda I_n)$.*

Definição 4.4.6. *Sejam $T \in \mathbb{L}(V)$, $dim V = n$ e β uma base de V. Quando λ é autovalor de T, o conjunto $Ker([T]_\beta^\beta - \lambda I_n)$ é chamado de autoespaço associado a λ.*
Notação: $\mathbb{E}_\lambda = Ker(T - \lambda I_n)$.

Definição 4.4.7. *Sejam V espaço vetorial sobre F, $T : V \to V$ (operador linear) e $W \subseteq V$, subespaço de V. Dizemos que W é T invariante se $T(W) \subseteq W$.*

Proposição 4.4.8. *Sejam $T \in \mathbb{L}(V)$, $\dim V = n$ e β uma base de V. Seja λ autovalor de T, $\mathbb{E}_\lambda = Ker([T]_\beta^\beta - \lambda I_n)$ é um subespaço T-invariante .*

Definição 4.4.9. *Seja* $T \in \mathbb{L}(V), \dim V = n$. *O operador* T *é dito diagonalizável se existe uma base de* V *formada por autovetores de* T.

Proposição 4.4.10. *Seja* $T \in \mathbb{L}(V)$, $\dim V = n < \infty$. *Existe um único polinômio mônico de menor grau com coeficientes em* $\mathbb{K}$, $m_T(x)$, *tal que* $m_T(T) \equiv 0$. *Este polinômio é chamado de polinômio minimal de* T.

Teorema 4.4.11. *(Cayley - Hamilton) Seja* $p_T(x)$ *o polinômio característico de* $T \in \mathbb{L}(V)$, *onde* $\dim V = n < \infty$. *Então* $p_T(T) \equiv 0$, *ou seja,* T *anula seu polinômio característico.*

Proposição 4.4.12. $\mathbb{K}$*[x] domínio de fatoração única. Seja* $T \in \mathbb{L}(V)$, $\dim V = n$. *O polinômio minimal de* T *divide em* $\mathbb{K}[x]$ *o polinômio característico de* T, *ou seja,* $m_T(x) \mid p_T(x)$. *Mais ainda, se* λ *é autovalor de* T, *então* $m_T(\lambda) = 0$, *ou seja,* $m_T(\lambda)$ *tem os mesmos fatores irredutíveis que* $p_T(x)$.

Proposição 4.4.13. $\mathbb{K}$*[x] domínio de fatoração única. Seja* $T \in \mathbb{L}(V)$, $\dim V = n$. T *é diagonalizável se, e somente se,* $m_T(x)$ *é um produto de polinômios lineares distintos em* $\mathbb{K}[x]$.

4.4.1 Exercícios Resolvidos

Exercício **4.4.1.** *Se A satisfaz a equação $x^2 - 5x - 2 = 0$, mostre que:*

(a) $A^{-1} = \frac{(A-5I)}{2}$

(b) $A^4 = 145A + 54I$

(c) $A^5 = 779A + 290I$

SOLUÇÃO

(a) Temos que:

$$A^2 - 5A - 2I = 0 \Leftrightarrow (A-5I)A = A(A-5I) = 2I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(A-5I)}{2}A = A\frac{(A-5I)}{2} = I, \text{ou seja}, A^{-1} = \frac{(A-5I)}{2}.$$

(b) $A^2 = 5A + 2I = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} A^4 &= (5A+2I)(5A+2I) = \\ &= 25A^2 + 20A + 4I = \\ &= 25(5A+2I) + 20A + 4I = 175A + 54I. \end{aligned}$$

(c)

$$A^5 = A^4A = (175A + 54I)A = 175A^2 + 54I = 779A + 290I. \quad \blacksquare$$

Exercício **4.4.2.** *Sejam A e B matrizes semelhantes, mostre que A e B têm o mesmo polinômio característico, logo os mesmos autovalores.*

Dem: A e B são semelhantes se, e somente se, $\exists\, P$ inversível (e de mesma ordem que A e B) tal que $P \cdot A \cdot P^{-1} = B$.

Temos que:

$$\det(B - xI_n) = \det(P \cdot A \cdot P^{-1} - xP \cdot I_n \cdot P^{-1}) = \det(P \cdot (A - xI_n) \cdot P^{-1}) =$$

$$= \det(P) \cdot \det(A - xI_n) \cdot \det(P^{-1}) = \det(A - xI_n). \quad \blacksquare$$

Exercício 4.4.3. *Sejam* $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *linear,* α *a base canônica do* $\mathbb{R}^3$*,* $\beta = \{(0,1,1),(0,-1,0),(1,0,1)\}$ *e*

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre o polinômio característico de T*, os autovalores de* T *e os autovetores correspondentes.*

(b) Ache $[T]_\beta^\beta$ *e o polinômio característico. Que observação você faz a este respeito?*

(c) Encontre uma base γ *de* $\mathbb{R}^3$ *, se for possível, tal que* $[T]_\gamma^\gamma$ *seja diagonal.*

SOLUÇÃO

(a)

$$\begin{aligned} p_T(x) &= \det([T]_\alpha^\alpha - xI_3) \\ &= \begin{bmatrix} 2-x & 0 & 1 \\ 0 & -3-x & 1 \\ 0 & 0 & -3-x \end{bmatrix} = \\ &= (2-x)(-3-x)^2. \end{aligned}$$

Os autovetores associados ao autovalor 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \quad z = y = 0 \ .$$

Portanto, $\mathbb{E}_2 = [(1,0,0)]$.

Os autovalores associados ao autovalor -3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \ z = x = 0 \ .$$

Portanto, $\mathbb{E}_{-3} = [(0,1,0)]$.

(b)

$$\begin{aligned} [T]_\beta^\beta &= [I]_\beta^\alpha \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot [I]_\alpha^\beta = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 0 & -6 \\ -2 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ são semelhantes, podemos concluir que possuem o mesmo polinômio característico(Ver exercício 2, acima).

(c) Observe que $m_T(x) = -(2-x)(-3-x)^2$, portanto T não é diagonalizável. Logo, não é possível encontrar tal base. Observe ainda que $\mathbb{E}_{-3} + \mathbb{E}_2 \neq \mathbb{R}^3$. ■

Observação 4.4.14. *Consideramos $m_T(x)$ polinômio mônico.*

Exercício 4.4.4. *Seja A uma matriz 3 X 3 triangular superior com todos os elementos acima da diagonal distintos e não nulos.*

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

(a) Quais são os autovalores e autovetores de A?

(b) Qual é o polinômio minimal de A?

SOLUÇÃO

(a)

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \\ &= \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b & c \\ 0 & d-\lambda & e \\ 0 & 0 & f-\lambda \end{bmatrix} = \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda)(f-\lambda). \end{aligned}$$

Os autovalores de A são: $a,\ d,\ f$.

Autovetores associados ao autovalor a:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} by + cz = 0 \\ (d-a)y + ez = 0 \\ (f-a)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ z = y = 0 \right.$$

Portanto, $\mathbb{E}_a = Ker(A - aI_3) = [(1,0,0)]$.

Autovetores associados ao autovalor d:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-d)x + by + cz = 0 \\ ez = 0 \\ (f-d)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-d)x + by = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$\mathbb{E}_d = Ker(A - dI_3) = \left[\left(\frac{-b}{(a-d)}, 1, 0\right)\right].$$

Obs: $a \neq d$.

Autovetores associados ao autovalor f:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-f)x + by + cz = 0 \\ (d-f)y + ez = 0 \\ fz = fz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{eb - c(d-f)z}{(a-f)(d-f)} \\ \\ y = \dfrac{-e}{(d-f)} \end{cases}$$

Portanto,

$$\mathbb{E}_f = Ker(A - dI_3) = \left[\left(\frac{eb - c(d-f)z}{(a-f)(d-f)}, \frac{-e}{(d-f)}, 1\right)\right].$$

Obs: $a \neq d,\ d \neq f$.

(b) Como o polinômio característico de A é um produto de fatores lineares distintos, segue que
$m_A(x) = -p_A(x) = -(a-x)(d-x)(f-x)$. ■

Observação 4.4.15. *Consideramos $m_T(x)$ polinômio mônico.*

Exercício 4.4.5. *Seja T um operador linear sobre $P_2(\mathbb{R})$ dado por*

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 4a_0 - (a_1 - 6a_2)x + a_1x^2$$

(a) determine o polinômio característico os autovalores de T;

(b) responda, justificando: T é diagonável?

(c) encontre bases para cada subespaço T-invariante uni-dimensional de $P_2(\mathbb{R})$.

SOLUÇÃO

(a) Considere $\alpha = \{1,\ x,\ x^2\}$, a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$.

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $p_T(x) = (4 - x)(x + 3)(x - 2)$.

(ii) Temos três autovalores distintos e como autovetores associados a autovalores distintos são LI, segue que T é diagonalizável e $\mathbb{E}_4 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_{-3} = \mathbb{R}^3,$ onde $\dim \mathbb{E}_{-3} = \dim \mathbb{E}_2 = \dim \mathbb{E}_4 = 1$.

Autovetores associados ao autovalor 4:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = c = 0$$

Portanto, $\mathbb{E}_4 = [(1, 0, 0)] = \{a \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Autovetores associados ao autovalor 2:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2c \end{cases}$$

Portanto, $\mathbb{E}_2 = [(0,2,1)] = \{2cx + cx^2 \mid c \in \mathbb{R}\}$.

Autovetores associados ao autovalor -3:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3c \end{cases}$$

Portanto, $\mathbb{E}_{-3} = [(0,-3,1)] = \{-3cx + cx^2 \mid c \in \mathbb{R}\}$. ■

Exercício **4.4.6.** *Se A e B são matrizes de ordem n,*

(a) mostre que 0 é autovalor de A se e somente se A é singular;

(b) AB e BA têm os mesmos autovalores;

(c) se A é não singular e λ um autovalor de A, mostre que λ^{-1} é um auto valor de A^{-1}.

SOLUÇÃO

(a) 0 é autovalor de $A \Leftrightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^n$, não nulo, tal que $Av = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow Ker(A) \neq \{0\} \Leftrightarrow A$ é singular.

(b) Seja λ autovalor de AB.

(i) $\lambda = 0$ é autovalor de $AB \Leftrightarrow Ker(AB) \neq$
$\neq \{0\} \Leftrightarrow Ker(BA) \neq \{0\} \Leftrightarrow 0$ é autovalor de BA.

(ii) Caso $\lambda \neq 0$:

- λ é autovalor de $AB \Leftrightarrow \exists v \in (\mathbb{R}^n - \{0\})$ tal que $AB(v) = \lambda v \Rightarrow B(v)(\neq \mathbf{0})$ é autovetor de BA associado a $\lambda \Leftrightarrow \lambda$ é autovalor de BA.
- λ é autovalor de $BA \Leftrightarrow \exists v \in (\mathbb{R}^n - \{0\})$ tal que $BA(v) =$ $= \lambda v \Rightarrow A(v)(\neq \mathbf{0})$ é autovetor de AB associado a $\lambda \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lambda$ é autovalor de AB.

(c) Observemos inicialmente que $\forall\lambda$ autovalor de A, $\lambda \neq 0$.

λ é autovalor de A $\Leftrightarrow \exists v \in (\mathbb{R}^n - \{0\})$ tal que
$A(v) = \lambda v \Leftrightarrow A^{-1}(A(v)) = \lambda A^{-1}(v) \Leftrightarrow A^{-1}(v) = \lambda^{-1} v \Leftrightarrow v \in$
$\in (\mathbb{R}^n - \{0\})$ é autovalor de A^{-1} associado a $\lambda^{-1} \Leftrightarrow \lambda^{-1}$
é autovalorde A^{-1}. ■

Exercício 4.4.7. *Mostre que as raízes características (autovalores) de uma matriz idempotente são 0 ou 1, e que o posto de A é o número de raízes características iguais a 1.*

SOLUÇÃO:

Seja A matriz de ordem n. Sabemos que
$A^2(v) = A(v)\ \forall v \in \mathbb{R}^n$. λ é autovalor de A $\Leftrightarrow \exists v \in (\mathbb{R}^n - \{0\})$ tal que
$A(v) = \lambda v \Rightarrow A(A(v)) = A(v) \Leftrightarrow \lambda^2 v = \lambda v \Leftrightarrow (\lambda^2 - \lambda)v = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\lambda^2 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 0$.

A é diagonalizável, pois $m_A(x) = x(x-1)$, daí $\mathbb{R}^n$ possui uma base formada por autovetores de A, logo o posto de A é o número de raízes características iguais a 1. ■

Observação 4.4.16. *Em particular: Diz-se que um operador $T \in \mathbb{L}(V)$ é idempotente se $T^2 = T$ (isto é, se $T \circ T(v) = T(v)$ para todo $v \in V$).*

Considere $[T]_\alpha^\alpha$ a matriz da transformação T em relação à base α de V ($\dim V < \infty$). T é idempotente se, e somente se, $[T]_\alpha^\alpha$ é idempotente. Os autovalores de $[T]_\alpha^\alpha$ são 0 e 1. Além disso, T é diagonalizável já que $m_T(x) = x(x-1)$. ■

Exercício 4.4.8. *Diz-se que um operador linear $T \in \mathbb{L}(V)$ é nilpotente se existir um número inteiro positivo n tal que $T^n \equiv 0$ (isto é, $T \circ T \circ T \circ \cdots T(v) = 0$ para todo $v \in V$.)*

(a) Seja T nilpotente. Encontre seus autovalores.

(b) Encontre uma matriz $A_{2\times 2} \neq 0$ tal que $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seja nilpotente.

(c) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K, mostre que Um operador $T \in \mathbb{L}(V)$ nilpotente, não nulo, não é diagonalizável.

SOLUÇÃO

(a) Como $T^n \equiv 0$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$ segue que $m_T(x) = x^k$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$, portanto, 0 é o único autovalor de T.

(b) Observemos que: se $T^n \equiv 0, T^{(n-1)} \neq 0 \Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\{v, T(v), \cdots, T^{n-1}(v)\}$ é LI, portanto, $n = 2$ (Ver Apêndice II - Transformações Lineares : Operadores Nilpotentes.)

Portanto, na base $\{v, T(v)\}$, com v obtido acima, T tem a seguinte representação matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, todas as matrizes nilpotentes de ordem 2 não nulas têm índice 2 e numa base adequada têm a mesma representação acima.

(c) De fato, seja $n \in (\mathbb{N} - \{0, 1\})$ tal que $T^n \equiv 0$ mas $T^{(n-1)} \neq 0$. Assim, $m_T(x) = x^n$. Portanto, T não é diagonalizável. ■

Exercício **4.4.9.** *Mostre que* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ *não é diagonalizável. No entanto, se A apresentar, numa certa base, um operador linear $T : V \to V$, onde V é um espaço vetorial complexo, então T é diagonalizável. Verifique este fato ou, equivalentemente, que existe uma matriz com elementos complexos $P_{3\times 3}$, inversível tal que*

$$P^{-1} \cdot A \cdot P \quad = \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - xI_3) = \\ &= \det \begin{bmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & -5 \\ 0 & 1 & -2-x \end{bmatrix} = (3-x)(x^2+1) \end{aligned}$$

Como (x^2+1) não é fatorável em $\mathbb{R}[x]$, temos que $m_T(x) = -p_T(x)$, já que eles têm os mesmos fatores irredutíveis. Se estivéssemos trabalhando em $\mathbb{C}$ teríamos:
$p_A(x) = (3-x)(x-i)(x+i) = -m_T(x)$. Neste caso, o polinômio minimal seria um produto de fatores lineares irredutíveis e distintos. Portanto, A seria diagonalizável. ■

Observação 4.4.17. *Consideramos $m_T(x)$ polinômio mônico.*

4.4.2 Formas Canônicas de Jordan

Definição 4.4.18. *Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Um λ - bloco de Jordan é uma matriz quadrada com todas as entradas da diagonal iguais a λ, as entradas imediatamente abaixo da diagonal iguais a 1 e as demais entradas nulas.* ***Notação:*** *J_λ.*

Observação 4.4.19. *Uma outra definição que pode ser encontrada em alguns livros para um λ - bloco de Jordan é: Uma matriz quadrada com todas as entradas da diagonal iguais a λ, as entradas imediatamente acima da diagonal iguais a 1 e as demais entradas nulas.*

Definição 4.4.20. *Uma matriz A está na forma canônica de Jordan se ela é escrita com blocos de Jordan na diagonal e as outras entradas nulas, ou seja,*

$$A = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_{\lambda_r} \end{bmatrix}$$

onde cada J_{λ_i} tem um tamanho específico não necessariamente igual aos dos outros.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

Teorema 4.4.21. *Seja $T \in \mathbb{L}(V)$ onde V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, de dimensão n. Suponhamos*

$$p_T(x) = (x-\lambda_1)^{s_1} \cdot (x-\lambda_2)^{s_2} \cdots (x-\lambda_r)^{s_r} \text{ e}$$

$$m_T(x) = (x-\lambda_1)^{d_1} \cdot (x-\lambda_2)^{d_2} \cdots (x-\lambda_r)^{d_r}.$$

Então:

1. *existe, pelo menos, um bloco de Jordan de tamanho $d_i \times d_i$ associado ao autovalor λ_i;*

2. *o número de blocos de Jordan de T associados ao autovalor λ_i é a dimensão do autoespaço associado a λ_i, ou seja, é igual à dimensão de $\mathbb{E}_{\lambda_i} = Ker(T - \lambda_i I_n)$.*

Demonstração: *Ver* **HOFFMAN**, *Kenneth &* **KUNZE**, *Ray. Álgebra Linear. Editora Polígono: São Paulo. 1971.*

Exemplo: Seja A uma matriz de ordem 9×9 cujo polinômio característico é $(x-3)^5 \cdot (x-2)^4$ e cujo polinômio minimal é $(x-3)^3 \cdot (x-2)^2$.

A menos de isomorfismos, as possíveis formas canônicas de Jordan de A são:

$$\begin{bmatrix} 3&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&3&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&3&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&3&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&3&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&3&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&3&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&3&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&3&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&3&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&3&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&3&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&3&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&3&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&3&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&3&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&3&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&2 \end{bmatrix}$$

Generalização da diagonalização de operadores lineares sobre um espaço vetorial de dimensão finita

Teorema 4.4.22. *DECOMPOSIÇÃO PRIMÁRIA*
Sejam V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $T : V \to V$ operador linear.
Se podemos fatorar $m_T(x)$ como produto de polinômios irredutíveis e distintos em $\mathbb{K}[x]$, ou seja, $m_T(x) = p_1^{d_1}(x) \cdot p_2^{d_2}(x) \cdots p_r^{d_r}(x)$ com $p_i(x) \neq$ $\neq p_j(x)$ se $i \neq j$, $p_i(x) \in \mathbb{K}[x]$ irredutível. Então existem $E_1, E_2, \cdots, E_r \in$ $\in \mathbb{L}(V)$ que satisfazem:

1. $E_1 + E_2 + \cdots + E_r = I.$
2. $E_i \cdot E_j \equiv \mathbf{0}$ *para* $i \neq j.$
3. $E_i \neq \mathbf{0}, \forall i = 1, \cdots, r.$
4. $Im(E_i) = Ker(p_i(T)^{d_i}), \forall i = 1, \cdots, r.$

Demonstração: *Ver* **HOFFMAN**, *Kenneth &* **KUNZE**, *Ray. Álgebra Linear. Editora Polígono: São Paulo. 1971.*

Sejam $T \in \mathbb{L}(V)$ e V espaço vetorial, sobre o corpo $\mathbb{K}$, de dimensão n.
Problema: O que fazer caso o operador T não seja diagonalizável? Existem alguns teoremas que nos garantem a existência de uma base para V, na qual T tem uma representação matricial mais conveniente?

Além da forma canônica de Jordan, vejamos mais um resultado que nos permite obter uma representação matricial mais conveniente para T:

Teorema 4.4.23. *Se $m_T(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \cdot (x - \lambda_2)^{d_1} \cdots (x - \lambda_r)^{d_r}$, então existe uma base α para V tal que $[T]_\alpha^\alpha = D + N$, D operador diagonal e N operador nilpotente, onde:*

$$D = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_r E_r;\ N = [T]_\alpha^\alpha - (\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_r E_r)$$

$E_i, \forall i = 1, \cdots, r$ *obtidos no Teorema da Decomposição Primária.*

Demonstração: *Ver* **HOFFMAN**, *Kenneth &* **KUNZE**, *Ray. Álgebra Linear. Editora Polígono: São Paulo. 1971.*

4.4.3 Aplicações

Aplicação 1: Potências de uma matriz

Caso I: Seja A uma matriz de ordem n diagonalizável, então as potências de A, A^p para $p \in \mathbb{N}$ são fácieis de calcular. Como A é diagonalizável, existe uma matriz inversível M tal que

$$M^{-1}AM = D, \text{ sendo } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \ddots & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ \ddots & & \lambda_3 & & \ddots \\ & 0 & & \ddots & \\ & & \ddots & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$A^p = MD^pM^{-1}, \text{ sendo } D^p = \begin{bmatrix} \lambda_1^p & & \ddots & & \\ & \lambda_2^p & & 0 & \\ \ddots & & \lambda_3^p & & \ddots \\ & 0 & & \ddots & \\ & & \ddots & & \lambda_n^p \end{bmatrix}$$

Exercício **4.4.10.** *Mostre que a matrix* $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ *é diagonalizável e calcule* A^n*, para* $n \in \mathbb{N}$.

Solução:

$$P_A(x) = \det\begin{bmatrix} 4-x & 4 \\ 1 & 4-x \end{bmatrix} = x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 6. \text{ Portanto, } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 2$, temos o sistema: $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_{\lambda_1} = (2,-1)$

Para $\lambda_2 = 6$, temos o sistema: $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_{\lambda_2} =$ $(2,1)$

Portanto, a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $M^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A^n &= MD^nM^{-1} = \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2^{n+1} + 2.6^n & 4.6^n - 2^{n+2} \\ 6^n - 2^n & 2^{n+1} + 2.6^n \end{bmatrix} \quad \blacksquare. \end{aligned}$$

Caso 2: Seja A uma matriz de ordem n não diagonalizável, então existe uma matriz de Jordan J e uma matriz inversível M tal que

$$M^{-1}AM = J, \text{ sendo}$$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & \\ & \lambda_2 & 1 & 0 & \\ \ddots & & \lambda_3 & 1 & \ddots \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & \ddots & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \ddots & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ \ddots & & \lambda_3 & & \ddots \\ & 0 & & \ddots & \\ & & \ddots & & \lambda_n \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ \ddots & & 0 & 1 & \ddots \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & \ddots & & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$J = D + N$$

onde D é uma matriz diagonal e N é uma matriz nilpotente de ordem n, ou seja $N^n = 0$. Como $DN = ND$, temos que

$$J^p = (D+N)^p = D^p + \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} D^{p-1}N + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} D^{p-2}N^2 + \cdots +$$

$$+ \begin{pmatrix} p \\ n-1 \end{pmatrix} D^{p-n+1}N^{n-1}$$

Portanto, $A^p = MJ^pM^{-1}$.

Exercício **4.4.11.** *Se* $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, *calcule* A^n.

Solução:

$$A = D + N, \text{ onde } D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $DN = ND$ e $N^3 = 0$, temos que

$$\begin{aligned} A^n &= (D+N)^n = \\ &= D^n + nD^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}D^{n-2}N^2 = \\ &= \begin{bmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 4^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 4^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{n(n-1)}{2} \begin{bmatrix} 4^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 4^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 4^n & n4^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}4^{n-2} \\ 0 & 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício **4.4.12.** *Se* $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$, *calcule* A^n.

Solução:

$$P_A(x) = \det \begin{bmatrix} 9-x & 4 \\ -9 & -3-x \end{bmatrix} = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 3.$$

Portanto, $J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = D + N$

Para $\lambda_1 = 3$, temos o sistema: $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow V_{\lambda_1} = (-2, 3)$

Escolhemos $v_{\lambda_2} = (a, b)$ tal que $M = \begin{bmatrix} -2 & a \\ 3 & b \end{bmatrix}$ é inversível e $M^{-1}AM = J$. Escolhemos $a = -1,\ b = 1$. Portanto a matriz,
$M = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$
Agora, como $DN = ND,$ e $N^2 = 0$, temos

$$\begin{aligned} J^n = (D+n)^n &= D^n + nD^{n-1}N = \\ &= \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} A^n &= MJ^nM^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= 3^{n-1} \begin{bmatrix} 3+6n & 4n \\ -9n & 3-6n \end{bmatrix} \ \blacksquare. \end{aligned}$$

Aplicação 2: Exponencial de uma matriz
Sendo A uma matriz de ordem n, a série exponencial

$$I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^p}{p!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

é convergente. A soma dessa série é denotada por e^A.
Caso 1: Se A for uma matriz quadrada diagonalizável, então

o cálculo de e^A torna-se bem simples, pois sendo

$$A = MDM^{-1}, \text{ onde } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \ddots & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ \ddots & & \lambda_3 & & \ddots \\ & 0 & & \ddots & \\ & & \ddots & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

temos que

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{MD^kM^{-1}}{k!} = M\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}\right)M^{-1} = Me^DM^{-1} \\ &= M\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \ddots & & \\ & e^{\lambda_2} & & 0 & \\ \ddots & & e^{\lambda_3} & & \ddots \\ & 0 & & \ddots & \\ & & \ddots & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}M^{-1} \end{aligned}$$

Exercício **4.4.13.** *Calcule e^A, sendo A a matrix* $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução:
Do exercício 4.4.10 acima

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \; M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$e^A = M\begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^6 \end{bmatrix}M^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2e^2 + 2e^6 & 4e^6 - 4e^2 \\ e^6 - e^2 & 2e^2 + e^6 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Caso 2: Seja A uma matriz de ordem n não diagonalizável, então existe uma matriz de Jordan J e uma matriz inversível M tal que

$M^{-1}AM = J$, sendo $J = D+N$, onde D diagonal e N nilpotente de ordem n. Como $DN = ND$ e $N^n = 0$ temos que

$$e^J = e^{D+N} = e^D.e^N = e^D\left\{I + N + \frac{N^2}{2!} + \cdots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$$

Portanto,

$$e^A = Me^JM^{-1}.$$

Exercício **4.4.14.** *Calcule* e^{At}*, onde* $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Solução:

$$A = D + N, \text{ onde } D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $DN = ND$ e $N^3 = 0$, temos que

$$\begin{aligned} e^{Nt} &= I + tN + \frac{1}{2}t^2N^2 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}t^2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto,

$$e^{At} = e^{Dt}.e^{Nt} = e^{4t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Exercício **4.4.15.** *Calcule e^{At}, onde A é a matrix $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$.*

Solução:
Do exercício 4.4.12 acima

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D + N,\ M = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$e^{Jt} = e^{Dt}.e^{Nt} = e^{Dt}(I + tN) = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$e^{A} = e^{3t}.M\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}M^{-1} = e^{3t}\begin{bmatrix} 1+6t & 4t \\ -9t & 1-6t \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Aplicação 3: Sistemas de Equações Lineares com coeficientes constantes

Seja A matriz de ordem n. Considere o sistema de equações diferenciais lineares:

$$X' = AX, \text{ onde } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ e\ X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

Podemos escrever A como MJM^{-1}, onde J é uma diagonal, ou na forma canônica Jordan. Fazendo a mudança $x = My$, o sistema fica equivalente a

$$Y' = JY$$

que é mais fácil de resolver.

Exercício **4.4.16.** *Resolve os sistema*

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

dado que quando $t = 0,\ X(0) = (x_1, x_2)^t = (6, 1)^t$.

Solução:

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Então, $P_A(x) = \det \begin{bmatrix} 3 - x & 4 \\ 3 & 2 - x \end{bmatrix} = (x - 6)(x + 1)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -1$. Portanto, $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Para $\lambda_1 = 6$, temos o sistema:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_{\lambda_1} = (4,3)^t$$

Para $\lambda_2 = -1$, temos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_{\lambda_2} = (1,-1)^t$$

Portanto, a matriz $M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

O sistema é equivalente a

$$y' = Jy$$

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 \Rightarrow y_1(t) = c_1e^{6t} \\ y_2' = -y_2 \Rightarrow y_2(t) = c_2e^{-t} \end{cases}$$

Portanto,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{6t} \\ c_2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Logo, a solução é

$$x = My = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} c_1e^{6t} \\ c_2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4c_1e^{6t} + c_2e^{-t} \\ 3c_1e^{6t} - c_2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Se $x_1 = 6$ e $x_2 = 1$ quando $t = 0$, então

$$X(0) = \begin{pmatrix} 4c_1 + c_2 \\ 3c_1 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e, portanto, $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$. Logo, a solução do problema do valor inicial é dada por

$$X = \begin{pmatrix} 4e^{6t} + 2e^{-t} \\ 3e^{6t} - 2e^{-t} \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Exercício **4.4.17.** *Ache a solução do sistema $x' = Ax$ sujeita à condição $x(0) = (3, -3)^t$, onde*

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solução:
Do exercício 4.4.12,

$$A = MJM^{-1}, \text{ onde } J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança $x = My$, o sistema é equivalente a

$$y' = Jy$$

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_2 \Rightarrow y_2(t) = c_2e^{3t} \end{cases}$$

Portanto,

$$y_1' = 3y_1 + c_2e^{3t} \Rightarrow y_1(t) = (c_1 + c_2t)e^{3t}$$

Portanto,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2t)e^{3t} \\ c_2e^{3t} \end{pmatrix}$$

Logo, a solução é

$$x = My = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (c_1 + c_2t)e^{3t} \\ c_2e^{3t} \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} -2c_1 - 2c_2t - c_2 \\ 3c_1 + 3c_2t + c_2 \end{pmatrix}$$

Se $x_1 = 3$ e $x_2 = -3$ quando $t = 0$, então

$$X(0) = \begin{pmatrix} -2c_1 - c_2 \\ 3c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

e portanto $c_1 = 0$ e $c_2 = -3$. Logo, a solução do problema do valor inicial é dada por

$$X = -3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 1 + 3t \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Aplicação 4: Classificação de Cônicas
Uma cônica é uma curva descrita em coordenadas canônicas do $\mathbb{R}^2$ pela equação

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Ex + Fy + G = 0 \qquad (*)$$

onde A, B, C, E, F, G são constantes. A cônica esta na forma canônica se em relação às coordenadas canônicas do $\mathbb{R}^2$ a sua equação é da forma:

$$\tilde{A}x^2 + \tilde{B}y^2 + \tilde{G} = 0 \qquad (**)$$

Exemplos são os círculos, elipses, parábolas e hipérboles. A equação $(*)$ pode ser expressa matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E & F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + G = 0 \qquad (***)$$

Nosso objetivo é eliminar o termo misto Cxy. Para isso, observamos que a matriz $K = \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}$ é real simétrica e, portanto, é diagonalizável, ou seja, existe uma matriz ortogonal P cujas colunas são os autovalores **normalizados** de K tal que $PKP^{-1} = D$, é a matriz diagonal. Portanto, se colocamos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} := P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

então a equação $(***)$ pode ser escrita como (pois $P^{-1} = P^t$)

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P^T D P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E & F \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + G = 0$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E & F \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + G = 0$$

Se $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, λ_1 e λ_2 sendo os autovalores da matriz K, temos que

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \begin{bmatrix} E & F \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + G = 0$$

que não possui mais o termo misto e portanto a sua posição geométrica será facilmente reconhecida.

Exercício 4.4.18. *Descreva a cônica cuja equação é*

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0.$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 4 = 0 \qquad (\S)$$

Seja $K = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$.

Então, $P_K(x) = \det \begin{bmatrix} 5-x & -2 \\ -2 & 8-x \end{bmatrix} = x^2 - 13x - 36 = (x-9)(x-4)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 4.$

Para $\lambda_1 = 9,$ temos o sistema:

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_{\lambda_1} = (1,-2)^t$$

Para $\lambda_2 = 4,$ temos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_{\lambda_2} = (2,1)^t$$

Seja $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, então $P^{-1} = P^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

Fazendo a mudança $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ em (§) temos

$$\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9u^2 + 4v^2 + 36u - 8v + 4 = 0$$

Completando o quadrado temos que

$$\frac{(u+2)^2}{2^2} + \frac{(v-1)^2}{3^2} = 1 \qquad \text{que é uma elipse.} \quad \blacksquare$$

4.4.4 Exercícios Propostos

1. Ache os autovalores e autovetores correspondentes das transformações lineares:

   (a) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que
   $T(x, y, z, w) = (x,\ x + y,\ x + y + z,\ x + y + z + w)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x+y,\ x-y+2z,\ 2x+y-z)$

   (c) $T : M_{2X2} \longrightarrow M_{2X2}$ tal que $T(A) = A^t$

2. (a) Mostre que um operador linear T (num espaço de dimensão finita) que comuta com qualquer operador linear diagonalizável é diagonalizável.

   (b) Nas condições do item (a), mostre que na verdade T é um múltiplo escalar do operador identidade, isto é, existe um número r tal que $T = r \cdot I$.

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} M & a & a & \cdots & a & a \\ a & M & a & \cdots & a & a \\ a & a & M & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & M & a \\ a & a & a & \cdots & a & M \end{bmatrix}_{n \times n}$$

   onde M e a são números reais. Mostre que:

   (a) os autovalores de A são $\lambda = M - a$ com multiplicidade $n - 1$ e $u = M + (n - 1)a$.

   (b) $detA = (M - a)^{(n-1)} \cdot [M + (n - 1)a]$.

4. Encontre o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$ cujos autoespaços são:

$$V_2 = \{(x, 2x);\ x \neq 0\},\ V_{-3} = \{(y, -y);\ y \neq 0\}.$$

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 2z, 2x + y + 2z, 2x + 2y + 2z).$$

Considere os vetores $\overrightarrow{v_1} = (2, 1, 1), \overrightarrow{v_2} = (1, 1, 1), \overrightarrow{v_3} = (-2, 0, 2)$, $\overrightarrow{v_4} = (-1, 1, 3)$ e $\overrightarrow{v_5} = (0, 3, 3)$, e identifique os que que são autovetores de T. Determine os autovalores de T.

6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (y, y, y),$$

mostre que os vetores $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 0), \overrightarrow{v_2} = (1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{v_3} = (0, 0, 1)$ determinam uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por autovetores de T. Calcule a representação matricial de T nesta base.

7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (y + z, 2y + 2z, y + 2z).$$

a) calcule o polinômio característico de T;

b) calcule os autovalores e os subespaços próprios de T;

c) determine uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por autovetores de T. Qual é a representação matricial de T nesta base?

d) designando por A a matriz que representa T na base canônica de $\mathbb{R}^3$, determine uma matriz de mudança de base S e uma matriz diagonal D tais que $D = S^{-1}AS$.

8. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (3x, 2y + z, 2z),$$

a) calcule o polinômio característico de T;

b) calcule os autovetores e os subespaços próprios de T;

c) mostre que não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por autovetores de T.

9. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que na base canônica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

a) calcule o polinômio característico de T;

b) calcule os autovalores e os subespaços próprios de T;

c) determine uma matriz de mudança de base S e uma matriz diagonal D tais que $D = S^{-1}AS$.

10. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 24 & -10 \end{bmatrix}$$

Mostre que todas são diagonalizáveis e calcule A^n, B^n e C^n, para $n \in \mathbb{N}$.

11. Calcule A^n e B^n com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

12. Seja $T_{\alpha,\beta} : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação definida por $T_{\alpha,\beta} = \alpha p'' + \beta p$, onde $P_2(\mathbb{R})$ é o conjunto dos polinômios reais em x de grau menor ou igual a 2 e $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$,

a) mostre que $T_{\alpha,\beta}$ é uma transformação linear;

b) mostre que $A = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 2\alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$ é a matriz representativa de $T_{\alpha,\beta}$ na base $\{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$;

c) para que valores de α e β, $T_{\alpha,\beta}$ é inversível?

d) determine os autovalores de $T_{\alpha,\beta}$. Para que valores de α e β, $T_{\alpha,\beta}$ é diagonalizável?

e) para $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ determine a forma canônica de Jordan de A e a solução geral do sistema $\vec{y}' = A\vec{y}$, onde $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^t$.

13. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

a) determine os seus autovalores (Nota: um dos autovalores é 4);

b) determine o subespaço próprio associado a cada autovalor ;

c) determine, sendo possível, uma matriz U tal que $U^{-1}AU$ seja diagonal;

d) determine a solução geral do sistema $\vec{y}' = A\vec{y}$.

14. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

a) mostre que A é diagonalizável, identificando uma matriz diagonal D e uma matriz de mudança de base S tais que $A = SDS^{-1}$;

b) calcule a única solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 5x_2(t) \end{cases}, \; x_1(0) = 1, \; x_2(0) = -1.$$

15. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

   a) mostre que A não é diagonalizável, identificando um bloco de Jordan J e uma matriz de mudança de base S tais que $A = SDS^{-1}$;

   b) calcule a única solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + 9x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 5x_2(t) \end{cases}, \; x_1(0) = 5, \; x_2(0) = 2.$$

16. Considere a correspondência $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y - z, z - y)$,

   a) mostre que T é uma transformação linear;

   b) determine a matriz representativa de T supondo fixada em $\mathbb{R}^3$ a base formada pelos vetores (1,1,1), (0,1,1) e (0,0,1);

   c) a transformação T é inversível? Justifique;

   d) mostre que 0 é um auto valor de T e que (0,-1,1) é um autor vetor de T;

   e) determine a multiplicidade geométrica do auto valor associado ao auto vetor (0,-1,1).

17. Seja A uma matriz quadrada de ordem n,

   a) mostre que A e A^t têm o mesmo polinômio característico;

   b) supondo que $A + I_n = A(A^t + I_n)$, mostre que, se $\det A \neq 1$, então -1 é autovalor de A;

18. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$,

a) determine os seus valores próprios;

b) determine o subespaço próprio associado a cada valor próprio;

c) determine, sendo possível, uma matriz U tal que $U^{-1}AU$ seja diagonal;

d) determine a solução geral do sistema $\vec{y'} = A\vec{y}$.

19. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ com a parâmetro real,

a) para que valores de a, a matriz dada admite um único valor próprio?

b) considerando $a = -2$, calcule e^{At};

c) supondo $a = 4$, determine uma matriz P inversível e uma forma canônica de Jordan J tais que $P^{-1}AP = J$.

20. Considere uma transformação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_2},\ f(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1}$ e $f(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_3}$, onde $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

a) mostre que $A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz representativa de f relativamente à base canônica;

b) sem utilizar a matriz da alínea (a) determine a expressão geral da transformação f;

c) determine o núcleo e a imagem de f bem como as respectivas dimensões. f é inversível? Justifique;

d) verifique que A_f é ortogonalmente diagonalizável;

e) determine os valores de $n \in \mathbb{Z}$ para os quais $(A_f)^n = A_f$;

f) considerando fixada em $\mathbb{R}^3$ a base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$, onde $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, determine a matriz representativa de f relativamente a esta base e designe-a por B_f. Justifique por que A_f e B_f têm os mesmos valores próprios.

21. Mostre que se A e B são matrizes quadradas e A é não singular, então as matrizes $A^{-1}BA$ e B têm os mesmos valores próprios.

22. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

a) determine a forma canônica de Jordan J da matriz A e calcule uma matriz P tal que $P^{-1}AP = J$;

b) calcule e^{At};

c) determine a solução geral do problema de valores iniciais $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^t$.

23. (a) Mostre que duas matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico

b) Aproveite (a) para mostrar que, sendo A uma matriz quadrada, os valores próprios de e^{At} ($t \in \mathbb{R}$) são $e^{\lambda_i t}$ com λ_i valor próprio de A.

24. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2$$

a) encontrar os autovalores da transformação;

b) encontrar os subespaços próprios da transformação.

25. Seja $T : M^{2,2} \longrightarrow M^{2,2}$ uma transformação linear definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a_{21} & a_{11} + a_{21} \\ a_{12} - 2a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a) encontrar os autovalores de T;

b) encontrar os autovetores de T.

26. Prove que a existência de um autovalor $\lambda = 0$, para uma transformação linear T é equivalente ao fato de T ser não inversível.
27. Sejam $A,\ B$ matrizes, prove que $e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ se, e somente se $AB = BA$.
28. Identifique as seguintes cônicas. Ache o centro quando a cônica é uma elipse ou hipérbole, as assíntotas se ela é hipérbole, o vértice e o eixo da simetria se ela é uma parábola. Esboçar as curvas.

(a) $x^2 + y^2 - 2xy + 16x + 16y = 0$;

(b) $16x^2 + 16y^2 - 16x + 8y - 59 = 0$;

(c) $7x^2 + 6xy - y^2 - 2x + 10y - 9 = 0$.

Capítulo 5

Uma Aplicação do Teorema da Decomposição Primária

SOLUÇÕES DE E.D.O. LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Considere: $I = (a, b)$, $I = (a, +\infty)$, $I = (-\infty, a)$ ou $I = \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
$\mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) um corpo.

$C^n(I, K) = \{f : I \to \mathbb{K} \mid \; f^{(n)} : I \to \mathbb{K}$ existe e é contínua em $I\}$.
Denotamos $D^n(f) = f^{(n)}$.

$C^0(I, K) = \{f : I \to \mathbb{K} \mid \; f$ é contínua em $I\}$. $D(f)$ representa a derivada de f

Teorema 5.0.24. *DECOMPOSIÇÃO PRIMÁRIA*

Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $T : V \to V$ (operador linear).
Suponha que existe um polinômio $P(x) \in \mathbb{K}[x]$, $P(x) = P_1^{r_1} \cdots P_k^{r_k}$; $P_j^{r_j}(x)$, $j = 1, \cdots, k$ são irredutíveis distintos tal que $P(T) \equiv 0$, sejam $W_i = \{v \in V \mid P_i^{r_i}(T) \equiv 0\}$ $i = 1, \cdots, k$. Logo $V = W = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$ e cada W_i é T-invariante.

Demonstração: *Ver* **HOFFMAN**, *Kenneth &* **KUNZE**, *Ray. Álgebra Linear. Editora Polígono: São Paulo. 1971.*

E.D.O. LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Definição 5.0.25. *Uma equação diferencial linear com coeficientes constantes é uma equação da forma:*

$$[D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I](Y) = f_0 \mid a_i \in \mathbb{R}, f_0 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{K}).$$

Definição 5.0.26. *Escrevemos* $P(D)(Y) = f_0$, *onde*

$$P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Observe que $P(D)$ *é um operador que se expressa como um polinômio em* D.

Suponhamos que $P(t) = \prod_{i=1}^{k}(t - c_i)^{r_i}$, c_i *distintos* $\forall i = 1, \cdots, k$; $c_i \in \mathbb{K}(=$
$= \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$.
Considere a equação homogênea $P(D)(Y) = 0$. *Seja*

$$W = \{f \in C^n(\mathbb{R},\ \mathbb{K}) \mid P(D)(f) = 0\}.$$

Observe que: $W = ker(P(D))$ *e portanto* W *é um espaço vetorial, sobre* $\mathbb{K}$, *de dimensão* n.

Lema 5.0.27. *W é D-invariante.*

Lema 5.0.28. *Seja* $c \in \mathbb{K}$ *e* $f \in C^r(\mathbb{R},\ \mathbb{K}) \Rightarrow (D - cI)^r(f) = e^{ct}D^r(e^{-ct}f)$.

Teorema 5.0.29. *As soluções de* $P(D)(Y) = 0 \quad (I)$ *são somas de funções*

$$f_i(t) = e^{c_i t}[a_0 + a_1 t + \cdots + a_{r_i - 1}t^{r_i - 1}];$$

a_j *constantes* $\in \mathbb{K}\ \forall j = 0, \cdots, r_i - 1. \quad (II)$.
Ou seja, f *é solução de (I)* $\Leftrightarrow f = f_1 + f_2 + \cdots + f_k$, *onde cada* f_i *tem a forma dada em (II) para cada* $i = 1, \cdots, k$.

Observação 5.0.30. *As soluções de* $(D-c)^r(Y)=0$ *são da forma*

$$f(t)=e^{ct}[a_0+a_1t+\cdots+a_{r-1}t^{r-1}].$$

5.1 Exemplos

1. Determine a forma particular das equações abaixo:

   (a) $(D^2-4D+4I)(Y)=t\,(2e^{2t}+t\ \text{sen}\,(t))$

   SOLUÇÃO: Consideremos o operador:
   $(D-2I)^2(D^2+I)^3$
   Aplicando o operador à equação (a), obtemos:

   $(D-2I)^2(D^2+I)^3(D^2-4D+4I)(Y)=0\Rightarrow$
   $\Rightarrow (D-2I)^4(D^2+I)^3(Y)=0\Rightarrow$
   $\Rightarrow Y\in Ker((D-2I)^4(D^2+I)^3).$
   Portanto,
   $Y(t)=C_0e^{2t}+C_1te^{2t}+C_2t^2e^{2t}+C_3t^3e^{2t}+C_4e^{it}+C_5te^{it}+$
   $+C_6t^2e^{it}+C_7e^{-it}+C_8te^{-it}+C_9t^2e^{-it}.$
   Assim, a solução particular pode ser escrita da seguinte maneira:
   $Y_P(t)=k_0t^2e^{2t}+k_1t^3e^{2t}+k_2e^{it}+k_3te^{it}+k_4t^2e^{it}+k_5e^{-it}+k_6te^{-it}+$
   $+k_7t^2e^{-it}.$
   Solução particular real (geral):
   $Y_P(t)=k_0t^2e^{2t}+k_1t^3e^{2t}+(k_2+k_3t+k_4t^2)\cos\,(t)+(k_5+k_6t+$
   $+k_7t^2)\ \text{sen}\,(t).$ ■

   (b) $(D^2+2D+2I)(y)=t^2-3te^{-2t}\cos\,(5t)$

   SOLUÇÃO: Observemos que:
   $D^3(t^2)=0$, $(D-(-2+5i)I)^2(D-(-2-5i)I)^2(-3te^{-2t}\cos\,(5t))=$
   $=0.$

Consideremos o operador:
$D^3(D-(-2+5i)I)^2(D-(-2-5i)I)^2$.

Aplicando o operador à equação (b), obtemos:
$D^3(D-(-2+5i)I)^2(D-(-2-5i)I)^2(D^2+2D+2I)(Y)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow Y(t) \in Ker(D^3(D-(-2+5i)I)^2(D-(-2-5i)I)^2(D^2+2D+$
$+\,2I))$.

Portanto,
$Y(t)=C_0+C_1t+C_2t^2+C_3e^{(-2+5i)t}+C_4te^{(-2+5i)t}+C_5e^{(-2-5i)t}+$
$+\,C_6te^{(-2-5i)t}+C_7e^{(1+i)t}+C_8e^{(1-i)t}$.

Logo, a solução particular pode ser escrita da seguinte maneira:
$Y_P(t)=k_0+k_1t+k_2t^2+k_3e^{(-2+5i)t}+k_4te^{(-2+5i)t}+k_5e^{(-2-5i)t}+$
$+\,k_6te^{(-2-5i)t}$.

Solução particular real (geral):
$Y_P(t)=$
$=k_0+k_1t+k_2t^2+(k_3+k_4t)e^{-2t}\cos(5t)+(k_5+k_6t)e^{-2t}\operatorname{sen}(5t)$.

(c) $(D^2+I)^3(D-I)(Y)=3e^{-t}+5t^2\cos(t)$

$$(D+I)(3e^{-t})=0,\ (D-iI)^3(D+iI)^3(5t^2\cos(t))=0.$$

Consideremos o operador: $(D+I)(D-iI)^3(D+iI)^3$.

Aplicando o operador à equação (c), obtemos:

$$(D+I)(D-iI)^3(D+iI)^3(D^2+I)^3(D-I)(Y)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(t) \in Ker((D+I)(D-iI)^3(D+iI)^3(D^2+I)^3(D-I)).$$

Portanto,

$$Y(t)=C_0e^{-t}+C_1e^t+(C_2+C_3t+C_4t^2+C_5t^3+C_6t^4+C_7t^5)e^{-it}+$$

$$+(C_8+C_9t+C_{10}t^2+C_{11}t^3+C_{12}t^4+C_{13}t^5)e^{it}.$$

Logo, a solução particular pode ser escrita da seguinte maneira:

$$Y_P(t) = k_0 e^{-t} + (k_1 t^3 + k_2 t^4 + k_3 t^5)e^{-it} + (k_4 t^3 + k_5 t^4 + k_6 t^5)e^{it}.$$

Solução particular real (geral):
$Y_P(t) = k_0 e^{-t} + (k_1 t^3 + k_2 t^4 + k_3 t^5)\cos(t) + (k_4 t^3 + k_5 t^4 +$
$+ k_6 t^5)\,\text{sen}\,(t)$. ■

(d) $D^2(D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + I)(Y) = (t^2 + 1)(1 - e^t)$.

SOLUÇÃO:

$$D^3(t^2 + 1) = 0,\ (D - I)^3(-t^2 e^t - e^t) = 0.$$

Consideremos o operador: $D^3(D - I)^3$.
Aplicando o operador à equação, obtemos:

$$D^5(D - I)^3(D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + I)(Y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y \in Ker(D^5(D - I)^3(D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + I)(Y)).$$

Portanto,

$$Y(t) = \sum_{j=0}^{4} C_j t^j + (\sum_{j=0}^{6} \widetilde{C}_j t^j)e^t.$$

Logo, a solução particular pode ser escrita da seguinte maneira:

$$Y_P(t) = \sum_{j=2}^{4} C_j t^j + (\sum_{j=4}^{6} \widetilde{C}_j t^j)e^t. \quad ■$$

(e) $(D^8 - 2D^4 + I)(Y) = (2t - 1)\cosh(t) + t^3 \operatorname{sen}(t)$.

SOLUÇÃO:

Sabemos que: $\cosh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Assim:

$(2t-1)\cosh(t) = (2t-1)\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = -\dfrac{e^t}{2} + te^t + \dfrac{e^{-t}}{2} - te^{-t}$.

$(D-I)^2(-\dfrac{e^t}{2} + te^t) = 0,\ (D+I)^2(\dfrac{e^{-t}}{2} - te^{-t}) = 0,$

$(D+iI)^4(D-iI)^4(t^3 sen(t)) = 0$.

Consideremos o operador: $(D-I)^2(D+I)^2(D+iI)^4(D-iI)^4$.

Aplicando o operador à equação, obtemos:

$$(D-I)^2(D+I)^2(D+iI)^4(D-iI)^4(D^8 - 2D^4 + I)(Y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(t) \in Ker((D-I)^2(D+I)^2(D+iI)^4(D-iI)^4(D^8 - 2D^4 + I)).$$

Portanto,

$$Y(t) = (\sum_{j=0}^{3} C_j t^j)e^t + (\sum_{j=0}^{3} \widetilde{C}_j t^j)e^t + (\sum_{j=0}^{5} B_j t^j)e^{it} + (\sum_{j=0}^{5} \widetilde{B}_j t^j)e^{-it}.$$

Logo, a solução particular pode ser escrita da seguinte maneira:

$$Y_P(t) = (\sum_{j=2}^{3} C_j t^j)e^t + (\sum_{j=2}^{3} \widetilde{C}_j t^j)e^t + (\sum_{j=0}^{5} B_j t^j)e^{it} + (\sum_{j=0}^{5} \widetilde{B}_j t^j)e^{-it}.$$

Solução particular real (geral):

$$Y_P(t) = (\sum_{j=2}^{3} C_j t^j)e^t + (\sum_{j=2}^{3} \widetilde{C}_j t^j)e^t + (\sum_{j=2}^{5} B_j t^j)\cos(t) +$$

$$+ (\sum_{j=2}^{5} \widetilde{B}_j t^j)\operatorname{sen}(t).$$

(f) $(D^3 - I)(D^2 + D - 2I)(Y) = e^{\frac{t}{2}}\ \text{sen}\,(\sqrt{3}t) - t\cos\,(\sqrt{3}t)$.

SOLUÇÃO:

$(D - (\frac{1}{2} - i\sqrt{3})I)(D - (\frac{1}{2} + i\sqrt{3})I)e^{\frac{t}{2}}\ \text{sen}\,(\sqrt{3}t) = 0$

$(D - i\sqrt{3}I)^2(D + i\sqrt{3}I)^2(t\cos\,(\sqrt{3}t)) = 0$.

Consideremos o operador:

$$[D - (\frac{1}{2} - i\sqrt{3})I][D - (\frac{1}{2} + i\sqrt{3})I](D - i\sqrt{3}I)^2(D + i\sqrt{3}I)^2.$$

Aplicando o operador à equação, obtemos:

$(D-(\frac{1}{2}-i\sqrt{3})I)(D-(\frac{1}{2}+i\sqrt{3})I)(D-i\sqrt{3}I)^2(D+i\sqrt{3}I)^2(D^3 -$
$- I)(D^2 + D - 2I)(Y) = 0 \Rightarrow$

$Y(t) \in ker((D - (\frac{1}{2} - i\sqrt{3})I)(D - (\frac{1}{2} + i\sqrt{3})I)(D - i\sqrt{3}I)^2(D +$
$+ i\sqrt{3}I)^2(D^3 - I)(D^2 + D - 2I))$.

Logo, a solução particular pode ser escrita da seguinte maneira:

$Y_P(t) = C_0e^{\frac{t}{2}}e^{-i\sqrt{3}t} + C_1e^{\frac{t}{2}}e^{i\sqrt{3}t} + C_2e^{i\sqrt{3}t} + C_3te^{i\sqrt{3}t} + C_4te^{-i\sqrt{3}t} +$
$+ C_5te^{-i\sqrt{3}t}$

Solução particular real (geral):

$Y_P(t) = (C_0\cos\,(\sqrt{3}t) + C_1\ \text{sen}\,(\sqrt{3}t))e^{\frac{t}{2}} + (C_2 + C_3t)\cos\,(\sqrt{3}t) +$

$+ (C_4 + C_5t)\ \text{sen}\,(\sqrt{3}t)$. ■

5.2 Exercícios Propostos

1. $(D^3 - I)^3(Y) = (2t + 1)^2e^t + \dfrac{t\ \text{sen}\,(t)}{2}$.

2. $(D^2 - 2D + I)(D^2 - 4I)^2(Y) = t\ \text{senh}\,(t) + \cosh\,(2t)$.

3. $[(4D^2 - 4D + 5I)(D^2 + 2D + I)]^2(Y) = t\,(1 + e^{\frac{t}{2}}\ \text{sen}\,(t) - t\ \cos\,(t))$.

4. $D(D^2 - 4I)^5(Y) = (t+1)^2[(t+1) + \text{ senh } (2t)]$.

Observação 5.2.1. ***Sugestão de leitura***

Dentre o material disponível no acervo da Biblioteca da UESC, citamos o seguinte trabalho para obterem outras aplicações da Álgebra Linear na Teoria da Equações Diferenciais.

1. ***BRANDÃO***. *Daniel Nicolau, Formas Canônicas e Sistemas de Equações Diferenciais. 2006. 59f. Monografia (Trabalho de conclusão de Curso) - Bacharelado em Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus.*

Capítulo 6

Respostas dos Exercícios Propostos

- **Matrizes (página 26)**

3) $\begin{bmatrix} \cos n\theta & -\operatorname{sen} n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ 4) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 2n-1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5) $\pm \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ e $\pm \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & b \\ c & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ onde $bc = \frac{1}{4}$.

8) $(a)\ 5 \quad (b)\ 10 \quad (c)\ 135 \quad (d)\ 15 \quad (e)\ \frac{1}{40} \quad (f)\ \frac{8}{5} \quad (g)\ 5 \quad (h)\ -5$

9) $(a)\ x = \pm 1,\ -2 \qquad (b)\ x = 1,\ 3 \qquad (c)\ x = 0,\ 2,\ 2$

10) $\dfrac{27\sqrt{10}}{100}$ 11) (a) 4 (b) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ 12) $\dfrac{1}{8}$

13) $\begin{cases} (a)\ B\cdot\dfrac{(B^2+5I)}{2}=I \quad (b)\ B^{-1}=\dfrac{(B^2+5I)}{2}=\begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \\ (c)\ B=\begin{bmatrix} 34 & -24 & -17 \\ 0 & -3 & 0 \\ 68 & 5 & 17 \end{bmatrix} \end{cases}$

14) $\begin{cases} (a) \text{ Verdadeira} \quad (b) \text{ Falsa} \quad (c) \text{ Falsa} \\ (d) \text{ Falsa} \quad (d) \text{ Verdadeira} \end{cases}$

15) 2006 $\begin{cases} I-26\% \\ II-22\% \\ III-52\% \end{cases}$ 2011 $\begin{cases} I-23\% \\ II-23,2\% \\ III-53,8\% \end{cases}$ 17) $B^{-1}\cdot A^m\cdot B.$

- **Sistemas Lineares (página 51)**

1) $(a)\ a=-2$ $(b)\ a\neq\pm2$ $(c)\ a=2$

2) $x=1,\ y=0,\ z=2,\ w=0$

3) $\begin{cases} (a)\ x=0,\ y=0,\ z=0 \\ (b)\ x_1=-s-t,\ x_2=s,\ x_3=-t,\ x_4=0,\ x_5=t \end{cases}$

4)

(a) $\begin{cases} \text{Se } \alpha\neq 11, \text{ o sistema é possível e determinado;} \\ \text{se } \alpha=11 \text{ e } \beta=20 \text{ o sistema é possível e indeterminado,} \\ \text{com solução } x=-30+29z,\ y=10-8z; \\ \text{se } \alpha=11 \text{ e } \beta\neq 20, \text{ o sistema é impossível.} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \text{Caso } \alpha=1, \text{ o sistema é indeterminado com solução} \\ x=9-46t,\ y=1-3t,\ z=-3+16t; \\ \text{caso } \alpha\neq 1, \text{ o sistema é possível e determinado} \\ \text{com solução:}(-\frac{19}{3},0,\frac{7}{3},\frac{1}{3}) \end{cases}$

$$(c)\begin{cases} \text{Se } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \neq 6, \text{ o sistema é possível e determinado;} \\ \text{caso } \alpha = 0 \text{ e } \beta = -\frac{2}{3}, \text{ o sistema é indeterminado tendo} \\ \text{a sua solução de dimensão 1;} \\ \text{e se } \alpha = 0 \text{ e } \beta \neq -\frac{2}{3}, \text{ o sistema é impossível;} \\ \text{caso } \alpha = 6 \text{ e } \beta = -\frac{2}{63}, \text{ o sistema é indeterminado tendo} \\ \text{a sua solução dimensão 1;} \\ \text{e se } \alpha = 6 \text{ e } \beta \neq -\frac{2}{63}, \text{ o sistema é impossível.} \end{cases}$$

5) $a = -2,\ \pm 1$

6) Devemos comprar as resistências R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 com as correntes máximas $5A,\ 3A,\ 0.5A,\ 3A,\ 3A$ respectivamente. O custo total será de R$ 115,00.

- **Espaços Vetoriais (página 88)**

1) $\{$ (a) Não $\quad$ (b) Sim $\quad$ (c) Não $\quad$ (d) Não $\quad$ (e) Não

2) $\{$ (a) Não $\quad$ (b) Não $\quad$ (c) Não $\quad$ (d) Sim $\quad$ (e) Sim

$$3)\begin{cases} (a) \text{ Uma base } F = \{(1,-1,0),(0,0,1)\};\ \dim F = 2; \\ (b)\ G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}; \\ \text{Conjunto gerador que não é base =} \\ = \{(0,0,1),(1,-1,0),(-1,1,1)\};\ \dim G = 2. \\ (c)\ F + G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\};\ \dim(F+G) = 2; \\ F + G \text{ não é soma direta.} \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} (a) \text{ Uma base para } F : \{(1,1,0,3),(0,0,1,0)\};\ \dim F = 2; \\ (b)\ G = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2w = 0 \text{ e } y + z + w = 0\}; \\ (c) \text{ uma base para } F + G : \\ \{(1,1,0,3),(0,0,1,0),(1,-1,1,0),(1,1,-2,1)\}; \\ \dim(F+G) = 4;\ F + G \text{ é uma soma direta.} \end{cases}$$

5) $\{$ $(b)(3,1,1)$ $\quad$ $(c)\{(1,1,1,0),\ (0,2,2,1),\ (-2,0,0,1)\}$

$$9)\begin{cases} (a)\ F(\text{falso}). \text{ Observe que } u \notin F \Leftrightarrow -u \notin F \text{ mas,} \\ u - u = 0 \in F; \\ (b)\ V(\text{verdadeiro}). \end{cases}$$

- **Transformações Lineares (página 128)**

$$1)\begin{cases} (a) \text{ nulidade} = 1 \\ (b)\ \{(3,0,-1,-1,0),\ (0,3,2,-1,0)\} \\ (c)\ \dim = 3 \\ (d)\ \{(1,0,0,-7),\ (0,1,0,-3),\ (0,0,1,3)\} \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} (b)\ k \neq 0,\ T^{-1}(x,y) = \left(\dfrac{x-y}{k}, y\right) \\ (c) \text{ dimensão} = 1,\ \text{base} = \{(1,-1)\} \end{cases} \qquad 3)\ (-8,0)$$

$$4)\begin{cases} (b) \text{ O núcleo é formado pelas matrizes reais simétricas,} \\ \dim = 3,\ \text{base:} \\ \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \\ (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$5)\begin{cases} (a) \text{ Uma base é } \{(0,2,1),\ (0,0,1)\} \\ (b) \text{ Nuc(T) tem dimensão 1 e base } \{(0,0,1)\} \end{cases}$$

$$6)\begin{cases} (a)\ 8 + 8x - 7x^2 \\ (b) \text{ Sim} \end{cases}$$

$$7)\begin{cases} (a) \text{ Nuc(T) tem dimensão 1 e base} \{(1,1,0)\} \\ (b) \text{ dimensão} = 2 \\ (c) \text{ Não} \end{cases}$$

$$8)\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

$$9)\begin{cases} (a)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (b)\ A^{-1} = \dfrac{1}{25}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ \\ (c)\ X = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 14 & 7 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$10)\begin{cases} (a)[T]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad (b)[T]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \\ \\ (c)T^{-1} = \dfrac{1}{8}(7x + 14y + z, -8y, -x - 2y + z) \\ \\ (d)[T^{-1}]_{B'} = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 7 & 29 & 30 \\ 1 & 5 & -6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$11)\begin{cases} (b)\ Nuc(T) = [(2,\ -3,\ 2)] \\ \\ (c)\ F(x,y) = (x + 2y, 2x + 2y, 3x + 4y) \\ \\ (d)\ G(x,y) = (-3y, 3x) \end{cases}$$

- **Diagonalização (página 168)**

$$1)\begin{cases} (a)\ \lambda = 1;\ v_\lambda = (0,0,0,1) \\ \\ (b)\ \lambda_1 = -1,\ v_{\lambda_1} = (-2,4,1);\ \lambda_2 = 2,\ v_{\lambda_2} = (1,1,1); \\ \lambda_3 = -2,\ v_{\lambda_3} = (1,-3,1) \\ \\ (c)\ \lambda_1 = 1,\ v'_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ v''_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ v'''_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \lambda_2 = -1,\ v_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

4) $T(x,y) = -\dfrac{1}{3}(4x - 5y,\ -10x - y)$

5) Nenhum dos vetores são autovetores. Os autovalores são $-1, \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$

6) $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7) $\begin{cases} (a)\ P(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda \\ (b) \begin{cases} \lambda_1 = 0,\ E_{\lambda_1} = [(1,0,0)]; \\ \lambda_2 = 2 + \sqrt{2},\ E_{\lambda_2} = [(1,2,\sqrt{2})]; \\ \lambda_3 = 2 - \sqrt{2},\ E_{\lambda_3} = [(-1,-2,\sqrt{2})] \end{cases} \\ (c)\ B = [(1,0,0),\ (1,2,\sqrt{2}),\ (-1,-2,\sqrt{2})] \\ [T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ (d)\ S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{cases}$

8) $\begin{cases} (a)\ P(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)^2 \\ \\ (b)\ \lambda_1 = 2,\ E_{\lambda_1} = [(0,1,0)];\ \lambda_2 = 3,\ E_{\lambda_2} = [(1,0,0)] \end{cases}$

9) $\begin{cases} (a)\ P(\lambda) = (6-\lambda)(9-\lambda)^2 \\ \\ (b)\ \lambda_1 = 6,\ E_{\lambda_1} = [(0,1,1)];\ \lambda_2 = 9, \\ E_{\lambda_2} = [(1,0,3)],\ v_{\lambda_3} = (0,1,-2) \\ \\ (c)\ S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \end{cases}$

$$10)\left\{\begin{array}{l} A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix},\ B^n = \begin{bmatrix} 2-3^n & 3^n-1 \\ 2-2.3^n & -1+2.3^n \end{bmatrix}, \\ \\ C^n = \begin{bmatrix} 3.2^n - 2(-2^n) & (-2)^n - (2)^n \\ 6.(2)^n - 6(-2)^n & 3(-2)^n - 2(2^n) \end{bmatrix} \end{array}\right.$$

$$11)\left\{\begin{array}{l} A^n = \begin{bmatrix} 2^n - n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ -n2^{n-1} & 2^n + n2^{n-1} \end{bmatrix} \\ B^n = \begin{bmatrix} 3^n - n3^{n-1} & n3^{n-1} \\ -n3^{n-1} & 3^n + 3^{n-1} \end{bmatrix} \end{array}\right.$$

$$12)\left\{\begin{array}{l} c)\ T_{\alpha,\beta} \text{ inversível se } \beta \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R} \\ d)\ \lambda = \beta.\ T_{\alpha,\beta} \text{ diagonalizável se } \alpha = 0,\ \beta \in \mathbb{R} \\ e) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ \left\{\begin{array}{l} y_1 = (c_1 + 2c_3 t)e^{2t} \\ y_2 = c_2 e^{2t} \\ y_3 = c_3 e^{2t} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$13)\left\{\begin{array}{l} (a)\ \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2 \\ (b)\ E_{\lambda_1} = [(1,1,2)],\ E'_{\lambda_2} = [(1,1,0)], \\ E''_{\lambda_2} = [(0,1,1)] \\ (c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (d) \left\{\begin{array}{l} y_1 = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t} \\ y_2 = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-2t} \\ y_3 = 2c_1 e^{4t} + c_3 e^{-2t} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$14)\left\{\ (a)\ D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \left\{\begin{array}{l} x_1 = 3e^{3t} - 2e^{4t} \\ x_2 = 3e^{3t} - 4e^{4t} \end{array}\right.\right.$$

$$15)\left\{\ (a)\ J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \left\{\begin{array}{l} x_1 = 3(1+t)e^{2t} \\ x_2 = (2+t)e^{2t} \end{array}\right.\right.$$

$$16) \begin{cases} (d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ (c) \text{ não inversível} \\ (e) \text{ mult. geom. } = 1 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} (a)\ \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1 \\ (b)\ E_{\lambda_1} = [(1,-2)],\ E'_{\lambda_2} = [(1,1)] \\ (c) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ (d) \begin{cases} y_1 = c_1 e^{4t} + c_2 e^t \\ y_2 = -2c_1 e^{4t} + c_2 e^t \end{cases} \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} (a)\ a = 0,\ a = 4 \\ (b) \begin{bmatrix} (7+4\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t} & (2+\sqrt{3})(e^{-\sqrt{3}t} - e^{\sqrt{3}t}) \\ (2+\sqrt{3})(e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t}) & (7+4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} - e^{\sqrt{3}t} \end{bmatrix} \\ (c)\ P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} (b)\ f(x,y,z) = (y,x,z) \\ (c)\ Nuc(f) = \{(0,0,0)\},\ \dim(Nuc(f)) = 0; \\ Im(f) = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, \\ \dim(Im(f)) = 3,\ f \text{ é inversível.} \\ (e)\ n \text{ ímpar} \\ (f)\ B_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$22)\begin{cases} (a)\ J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ (b)\ e^{At} = e^{3t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{cases} y_1 = e^{3t} \\ y_2 = -e^{3t} \end{cases} \end{cases}$$

$$24)\begin{cases} (a)\ \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -4 \quad (b)\ E_{\lambda_1} = [(5,-2,1)],\ E_{\lambda_2} = [(-6,8,3)] \end{cases}$$

$$25)\begin{cases} (a)\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2 \\ (b)\ v_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ v_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ v_{\lambda_3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$28)\begin{cases} (a)\ \text{parábola} \qquad (b)\ \text{elipse} \qquad (c)\ \text{hipérbole} \end{cases}$$

- **Soluções de E.D.O com coeficientes constantes(página 143)**

  1)$Y_P(t) = (k_0 + k_1 t + k_2 t^2)t^3 e^t + (k_3 + k_4 t)\cos(t) + (k_5 + k_6 t)\,\text{sen}(t)$.

  2)$Y_P(t) = (k_0 + k_1 t)t^2 e^t + (k_2 + k_3 t)e^{-t} + k_4 t^2 e^{2t} + k_5 t^2 e^{-2t}$.

  3)$Y_P(t) = k_0 + k_1 t + t^2 e^{\frac{t}{2}}[(k_3 + k_4 t)\cos(t) + (k_5 + k_6 t)\,\text{sen}(t)] +$
  $+ (k_7 + k_8 t + k_9 t^2)\cos(t) + (k_{10} + k_{11} t + k_{12} t^2)\,\text{sen}(t)$.

  4)$Y_P(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{4} k_j t^j + (\sum_{j=5}^{7} \widetilde{k}_j t^j)e^{2t} + (\sum_{j=5}^{7} \widetilde{c}_j t^j)e^{-2t}$.

Capítulo 7

Considerações Finais

XV Seminário Estudantil de Pesquisa - V. I - UFBA - 1996.

C5-MATEMÁTICA
TÍTULO DO TRABALHO: ESPAÇOS VETORIAIS DE DIMENSÃO INFINITA
BOLSISTAS: Cláudia Ribeiro Santana - Matemática (PIBIC/CNPQ) Maria Amélia de Pinho Barbosa - Matemática (PIBIC/CNPQ).
ORIENTADORA: Ednalva Vergasta Andrade, Instituto de Matemática, *Dept^o* de Matemática da UFBA.

RESUMO DO TRABALHO:

Um dos objetivos do presente trabalho foi comparar espaços vetoriais de dimensão finita com os de dimensão infinita, verificando que muitos resultados válidos para a dimensão finita não são válidos se a dimensão for infinita. Sabemos que nos espaços de dimensão finita todo operador linear possui um operador auto adjunto, todo operador auto-adjunto possui uma base ortonormal formada por vetores característicos, todo funcional linear é associado a um vetor representante e que sendo W subespaço, temos $W^{\perp\perp} = W$. Buscamos em espaços vetoriais de dimensão infinita, contra-exemplos.

Obtivemos exemplos de operadores sem adjunto, de um operador auto-adjunto sem vetores característicos, de um funcional linear sem representante e de um subespaço W tal que $W^{\perp\perp} \neq W$.
Estudamos também algumas características e propriedades dos espaços de Hilbert e Banach, que são espaços vetoriais de dimensão infinita. Como exemplo de espaço de Hilbert, citaremos o l^2, que é um espaço normado munido de um produto interno. Neste espaço, foram estudados conceitos e resultados tais como a forma quadrática associada a um produto interno, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a lei do paralelogramo, a métrica de um espaço normado, o Teorema de Jordan - Von Neumann e a existência de um isomorfismo entre o l^2 e qualquer espaço de Hilbert de dimensão infinita que possui uma base ortonormal. Como exemplo de espaço de Banach, citaremos o espaço vetorial normado $l^p, p \geq 1, p \in \mathbb{N}$. Os elementos deste espaço satisfazem algumas condições, tais como a desigualdade de Hölder, que é a forma mais geral da desigualdade de Minkowski, que corresponde à desigualdade triangular. Algumas características básicas forma verificadas, com ser completo, ou seja, toda seqüência de Cauchy neste espaço é convergente. Para $p \neq 2$ a lei do paralelogramo não é satisfeita, e a norma não provém de um produto interno, portanto $l^p, p \neq 2$ não é um espaço de Hilbert. É interessante observar que todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach.

PALAVRAS CHAVES: Contra-exemplos, Hilbert, Banach, normado, completo.

TÍTULO DO PROJETO DO(S)ORIENTADOR(ES): ESPAÇOS VETORIAIS DE DIMENSÃO INFINITA.

Capítulo 8

Bibliografia

Capítulo 1

1. **BOLDRINE**, José Luiz. **COSTA**, Suelli I. Rodrigues. **FIGUEREDO**, Vera Lúcia. **WETZLER**, Henry G. Álgebra Linear. 3^a edição. Editora: HARBRA ltda.

2. **LIMA**, Elon Lages. Geometria Analítica e Álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária. IMPA. SBM.

Capítulo 2

1. **BOLDRINE**, José Luiz. **COSTA**, Suelli I. Rodrigues. **FIGUEREDO**, Vera Lúcia. **WETZLER**, Henry G. Álgebra Linear. 3^a edição. Editora: HARBRA ltda.

2. **CALLIOLI**. Carlos A., **DOMINGUES**. Hygino H., **COSTA**. Roberto C.F.. Álgebra Linear e Aplicações. 6^a edição reformulada. Editora Atual: São Paulo 1990.

3. **KREIDER**, Donald L.. **KULLER**, Robert G.. **OSTBERG**, Donald R.. Equações Diferenciais. Tradução: Elza F..São Paulo. Edgard Blücher. Editora: Universidade de São Paulo. 1972.

Capítulo 3

1. **BOLDRINE**, José Luiz. **COSTA**, Suelli I. Rodrigues. **FIGUEREDO**, Vera Lúcia. **WETZLER**, Henry G. Álgebra Linear. 3ª edição. Editora: HARBRA ltda.

2. **CARVALHO**, João Pitombeira de. Uma introdução à Álgebra Linear. 2ª ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos. IMPA. 1977.

3. **HOFFMAN**, Kenneth & **KUNZE**, Ray. Álgebra Linear. Editora Polígono: São Paulo. 1971.

4. **LANG**, Serg. Estruturas Algébricas. Tradutor: Prof. Cláudio R. W. Abramo. Rio de Janeiro, Ao livro técnico; Brasília, Instituto Nacional do Livro, 1972.

5. **LIMA**, Elon Lages. Álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 1996.

6. Universidade Federal de Pernambuco. Departamento de Matemática. Notas de Aula - Curso de Verão 2003: Álgebra Linear.

7. Universidade Federal da Bahia. Departamento de Matemática. Listas de Exercícios: Álgebra Linear.

Capítulo 4

1. **HILL**, David. Universidade Federal da Bahia. Departamento de Matemática. Notas de aula do Curso de Teoria das Equações Diferenciais-1996.

2. **HOFFMAN**, Kenneth & KUNZE, Ray. Álgebra Linear. Editora Polígono: São Paulo. 1971.

3. **KREIDER**, Donald L.. **KULLER**, Robert G.. **OSTBERG**, Donald R.. Equações Diferenciais. Tradução: Elza F..São Paulo. Edgard Blücher. Editora: Universidade de São Paulo. 1972.

4. **LIMA**, Elon Lages. Álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 1996.